

Problème : *donné en 84.85.*

DAVID R. BOURGAIN

On notera L^2 l'ensemble des fonctions de carré intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (& continues) i.e. les fonctions intégrables sur $\mathbb{R}_+$ telles que $\int_0^\infty f^2(x) dx$ existe.) Dans les parties I et II, on étudiera un cas particulier.

I

1°)- a) Pour $x \neq 0$, montrer que l'intégrale $\int_0^\infty \frac{t \operatorname{Arctg}(1/t)}{(t^2 + x^2)^a} dt$ a un sens ssi $a > 1/2$.

On notera par la suite sa valeur par $I_a(x)$. On pose alors $g(x) = I_1(x)$ et $h(x) = I_2(x)$.

B) Montrer que pour $x > 0$ $h(x) = \frac{\pi}{4x^2(x+1)}$ en déduire $h(x)$ pour $x < 0$.

2°)- a) Montrer que pour $u > 0$ on a $0 < \operatorname{Arctg} u < u$; en déduire que pour $x > 0$ $0 < g(x) < \pi/2x$. Quelle est la limite de $g(x)$ quand x tend vers l'infini ?

b) Si $0 < x < 1$; montrer alors $\frac{\pi}{8} \log \frac{x^2 + 1}{x^2} < \int_0^1 \frac{t \operatorname{Arctg}(1/t)}{t^2 + x^2} dt$ en déduire que $g(x) \rightarrow +\infty$ si $x \rightarrow 0^+$.

On admettra par la suite que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $g'(x) = -2xh(x)$.

3°) Déterminer $g(x)$, d'abord pour $x > 0$ puis pour $x < 0$. Quel est l'équivalent de g quand x est infiniment petit (positif ou négatif) ?

II

g est la fonction étudiée au I

1°)- Etudier les variations de la fonction k définie par $k(x) = \begin{cases} \text{si } x > 0 & \frac{\pi}{2(1-x)} - g(x) \\ \text{si } x < 0 & \frac{\pi(x+1)}{2(1-x)^2} - g(x) \end{cases}$

2°)- Etudier les variations de la fonction l définie par $l(0) = 0$ et $l(x) = \frac{x}{(x+1)^2} g(x)$. Tracer sa courbe représentative.

III

1°)- a) Si u et v sont intégrables sur $\mathbb{R}$ montrer alors que pour tout $x > 0$ on a : $\left[\int_0^x u(t)v(t) dt \right]^2 \leq \int_0^x u^2(t) dt \cdot \int_0^x v^2(t) dt$

b) Dédire du a) que si u et v sont éléments de L^2 , alors $\int_0^\infty u(x)v(x) dx$ est absolument convergente et que l'on a : $\left| \int_0^\infty u(x)v(x) dx \right|^2 \leq \int_0^\infty u^2(x) dx \int_0^\infty v^2(x) dx$ (question à traiter soigneusement)

c) Montrer alors que sur L^2 la forme bilinéaire $B(u,v) = \int_0^\infty u(x)v(x) dx$ est définie positive et L^2 est préhilbertien. On note $B(u,v) = (u, v)$.

2°)- Soit f élément de L^2 .

a) Montrer que si $x \neq 0$ et $a > 3/4$ alors $J_a(x) = \int_0^\infty \frac{tf(t)dt}{(t^2 + x^2)^a}$ existe. On pose alors $j(x) = J_1(x)$.

b) Calculer $\int_0^\infty \frac{t^2 dt}{(t^2 + x^2)^2}$ puis démontrer $j(x)^2 \leq \frac{\pi}{4x} \int_0^\infty f^2$ ($x > 0$)

c) x étant fixé ($x > 0$) et h un réel : $x + h > x/2$, montrer l'inégalité : $|j(x+h) - j(x)| \leq \frac{4|h(2x+h)|}{x^2} \int_0^\infty \frac{t|f(t)| dt}{t^2 + x^2}$. En déduire que j est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

3°)- Soit $i(x)$ définie par $i(0) = 0$ et si $x > 0$ $i(x) = \frac{x}{(x+1)^2} j(x)$.

a) Montrer que i appartenant à L^2 et que $i^2 \leq \frac{\pi}{24} \int_0^\infty f^2$.