

Exercice I: Soit E un espace vectoriel. L, M, N trois s.e.v. de E .

A.t. on les égalités: $L \cap (M + N) \stackrel{?}{=} L \cap M + L \cap N$.

$$L \cap (M + L \cap N) \stackrel{?}{=} L \cap M + L \cap N.$$

(Il faut : soit montrer l'identité soit donner un contre-exemple explicite)

Exercice II: Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$; on considère les éléments f_a définis par

$$f_a(x) = |x - a|. \text{ Montrer que la famille } (f_a)_{a \in \mathbb{R}} \text{ est libre dans } E.$$

(On commencera par étudier la famille f_{a_1}, f_{a_2} et on généralisera.)

N.B.: Je tiendrai particulièrement compte de la redaction

Problème: On définit dans $\mathbb{Z}^2$ les 2-lois $+$ et $\times$ par:

$$\forall (a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4 : (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \text{ et } (a, b) \times (c, d) = (ac + bd, ad - bc)$$

1°). Dire pourquoi (sans démonstrations) $(\mathbb{Z}^2, +, \times)$ est un anneau commutatif (unitaire) et on précisera quels sont les éléments neutres; montrer que $\mathbb{Z}^2$ est intègre.

2°). On pose: $N(a, b) = a^2 - 13b^2$; vérifier que:

$$\forall (a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4 : N((a, b) \times (c, d)) = N(a, b) \times N(c, d).$$

Prouver que: (a, b) inversible (pour $\times$) $\Leftrightarrow N(a, b) = \pm 1$

3°). Montrer que les équations $x^2 - 13y^2 = 2$ et $x^2 - 13y^2 = -2$ n'ont pas de solutions dans $\mathbb{Z}$ (on pourra s'intéresser aux parités); en déduire: si $N(a, b) = 4$ et si $(a, b) = (c, d) \times (e, f)$ donc, soit (c, d) , soit (e, f) est inversible.

4°). On considère l'ensemble: $\{(2, 0) \times (x, y) + (1, 3) \times (z, t); (x, y, z, t) \in \mathbb{Z}^4\} = E$.

Montrer que: a) E est un idéal de $(\mathbb{Z}^2, +, \times)$; b) $(1, 0) \notin E$, (utiliser le point 3°)
c) E n'est pas un idéal principal.

Montrer que l'idéal engendré par $(2, 0)$ n'est pas premier ($(4, 0) \in \mathcal{I}$ et $\exists (x, y) \in (\mathbb{Z}^2)^2 : x \cdot y = (4, 0)$ mais ni x , ni y ne sont éléments de $\mathcal{I}$)

5°). Soit un élément (a, b) de $\mathbb{Z}^2$, inversible pour $\times$ et tel que: $a > 0, b > 0$.

a). Prouver que $b \geq 5$ et donner la valeur de a lorsque $b = 5$.

b). Montrer que: $\exists! (a_1, b_1) \in \mathbb{Z}^2 : (a, b) = (a_1, b_1) \times (18, 5)$; montrer que (a_1, b_1) est aussi inversible et que: $0 < a_1 \leq a$; $0 \leq b_1 \leq b$.

c). En déduire que: $\exists! n \in \mathbb{N}^* : (a, b) = (18, 5)^n (= (18, 5) \times \dots \times (18, 5) \text{ } n \text{ fois})$.

d). Conclure: $\forall (a, b)$ inversible pour $\times$ (a et b de signe quelconque), $\exists! n \in \mathbb{Z}$ et $\exists! \varepsilon \in \{-1, +1\}$ tels que: $(a, b) = \varepsilon (18, 5)^n$.

N.B.: Les questions sont indépendantes si l'on admet les résultats que l'on arrive pas à démontrer.

Idée du barème: I. 2,5, II. 3,5 ; Problème: 14

1°). 2, 2°). 1, 3°). 2.

4°). 3, 5: a) 0, 5, b) 1, c) 1 et 1.

5°). 5, 5: a) 1, b) 2, c) 0, 5, d) 2.