

I. Sous groupes de $\mathbb{Z}^2$, de $\mathbb{Z}^3$.

d'ensemble $(\mathbb{Z}, +)$ étant un groupe additif, on considère le groupe produit: $(\mathbb{Z}^2, +) = \{(a, b); a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\}$.

On désigne par p_1 (resp. p_2) les projections canoniques:
 $(a, b) \mapsto a$ (resp. b).

1°. Soit G un sous groupe de $\mathbb{Z}^2$. Montrer que dans l'ensemble $p_2(G)$, il existe un entier $b_0 \geq 0$ et un seul, tel que tout élément de $p_2(G)$ s'écrit: $n \cdot b_0$.

2°. Soit alors (a_0, b_0) un élément de G dont la 2^{ème} projection est b_0 . Montrer que tout élément (m, n) de G s'écrit de manière unique sous la forme: $(m, n) = n(a_0, b_0) + (s, 0)$, avec: $(s, 0) \in \mathbb{Z}^2$.

Prouver que l'application $(m, n) \mapsto s$ est un homomorphisme de G dans $\mathbb{Z}$.

3°. En déduire que tout sous groupe G de $\mathbb{Z}^2$ est soit réduit à $\{0\}$, soit du type $\mathbb{Z}g_0$ où $g_0 \neq (0,0)$ soit du type $\mathbb{Z}g_0 + \mathbb{Z}g_1$, où g_0 et g_1 , considérés comme éléments de $\mathbb{R}^2$ sont linéairement indépendants.

4°. Étendre la méthode précédente à l'étude des sous-groupes de $\mathbb{Z}^3$.

II. Groupes ordonnés:

Étant donné un groupe abélien G muni additionnellement, on dit qu'une relation d'ordre est compatible avec l'addition dans G si pour tout x de G :

$$a \leq b \Rightarrow a+x \leq b+x$$

On dit alors que G est un groupe ordonné.

1°. Montrer que toute relation d'ordre compatible avec l'addition dans G est de la forme $b \leq a \Leftrightarrow a - b \in P$, P étant l'ensemble des éléments supérieurs à l'élément neutre 0 .

Montrer que $P + P \subset P$ et $P \cap (-P) = \{0\}$.

(4)

(On rappelle que $P + P = \{x+y, x \in P, y \in P\}$ et $-P = \{-x, x \in P\}$.)

2°. Réciproquement, montrer que si P est une partie de G vérifiant les deux relations (1), la relation $b \leq a \Leftrightarrow a - b \in P$ est une relation d'ordre compatible avec l'addition dans G .

Montrer que l'ordre est total si et seulement si $G = P \cup (-P)$.

3°. On définit sur $\mathbb{R}^2$ l'ordre lexicographique:

$$(x, y) \leq_1 (x', y') \Leftrightarrow x < x' \text{ ou } x = x', y \leq y'$$

et une deuxième relation d'ordre définie par:

$$(x, y) \leq_2 (x', y') \Leftrightarrow x \leq x' \text{ et } y \leq y'$$

Ces ordres sont-ils compatibles avec la structure de groupe de $\mathbb{R}^2$, sont-ils partiels ou totaux? Représenter P dans chacun des cas.

4°. Reprendre cet exercice en notation multiplicative (G toujours abélien). Montrer que dans le groupe $\mathbb{N}^2$ on peut prendre pour P vérifiant $1 \in P$, $P \cdot P \subset P$ et $P \cap P^{-1} = \{1\}$, l'ensemble $\mathbb{N}^2$; expliciter la relation $ba^{-1} \in \mathbb{N}^2$; l'ordre obtenu est-il total?