

III - 1° Soit n un entier naturel non nul, démontrer que :

a) $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^p + \dots + C_n^n = 2^n$; b) $C_n^0 - C_n^1 + \dots + (-1)^p C_n^p + \dots + (-1)^n C_n^n = 0$
 (utiliser $(1-1)^n = 0$).

2° Soit n un entier naturel non nul, et $p \leq n$. Démontrer que

$$\forall k \in [0, p] ; C_n^k C_{n-k}^{p-k} = C_n^p C_p^k.$$

Démontrer que : $\sum_{k=0}^p C_n^k C_{n-k}^{p-k} = 2^p C_n^p$ et que $\sum_{k=0}^p (-1)^k C_n^k C_{n-k}^{p-k} = 0$.

3° Soit A_n le nombre de substitutions de $\{1, 2, \dots, n\}$ telles que $\forall k : \sigma_k \neq k$. Démontrer, grâce à une partition convenable de l'ensemble des substitutions de $\{1, 2, \dots, n\}$ que :

$$A_n + C_n^1 A_{n-1} + \dots + C_n^p A_{n-p} + \dots + C_n^{n-1} A_1 + 1 = n!$$

4° En utilisant la 3^{ième} et la dernière égalité du 2°, démontrer que $A_n = n! - C_n^1 (n-1)! + \dots + (-1)^p C_n^p (n-p)! + \dots + (-1)^n C_n^n$.

Idee du barème :

I : 6 points :

1°) 1 pt

2°) 1,5

3°) 1,5

4°) 2

II : 7 points

1°) 1

2°) 1,5

3°) ~~2,5~~

4°) 2,5

III : 7 points

1°) 1

2°) 1

3°) 2

4°) 3