

$\mathcal{S} = (2, 0) \in \mathbb{Z}^2$: pas premier: il suffit de prendre:

$$x = (11, 3); y = (11, -3); xy = (4, 0).$$

4 pb (2)

5°) (a, b) : inversible: $a > 0, b > 0$

a). $b \geq 5$? : $a^2 - 13b^2 = \pm 1$. $b = 1$ imp. $b = 2, b = 3, b = 4$ imp.
 $b = 5 \Rightarrow a = 18$.

3 pb

b). (a, b) inversible: $(a, b)(18, 5)^{-1} = (a_1, b_1) \Rightarrow$ existence et unicité
 $(18, 5)^{-1} = (-18, 5)$. $\Rightarrow a_1 = -18a + 65b$ et $b_1 = -18b + 5a$.
 et (a_1, b_1) inversible

3

$$a = 18a_1 + 65b_1$$

$$b = 18b_1 + 5a_1$$

7

$$a^2 - 13b^2 = \pm 1 \Rightarrow \text{on a: } a_1 = 65b - 18a \text{ et } a \leq \sqrt{13b^2 + 1}$$

$$\Rightarrow a_1 \geq 65b - 18\sqrt{13b^2 + 1} = \frac{(65b)^2 - (18)^2(13b^2 + 1)}{65b + 18\sqrt{13b^2 + 1}}$$

$$\text{or: } (65b)^2 - (18)^2(13b^2 + 1) = 13 \times 325b^2 - 324(13b^2 + 1) = 13b^2 - 324 > 13b^2 - 325 = 13(b^2 - 25) \geq 0$$

$$\Rightarrow a_1 > 0. \text{ de même: } b_1 \geq 0 \Rightarrow a_1 < 0 \text{ et } b_1 < b$$

10 pb

c). par récurrence:

$$(a, b) = (a_p, b_p) \times (18, 5)^p: \text{ et } 0 \leq b_p \leq b - p.$$

par conséquent, $\exists p: b_p = 0 \Rightarrow a_p = 1$ (car $a_n > 0$).

$$\Rightarrow (a, b) = (18, 5)^n. \text{ } n \text{ est unique!}$$

3 pb

d). si $a > 0, b > 0$: termine.

si $a < 0, b < 0$: $\varepsilon = -1 \Rightarrow$ termine.

2

2 cas: $a > 0, b < 0$: (il faudrait $n < 0$) $\rightarrow$ on montre comme au b) que:

$$0 < -a_1 < a \text{ et } 0 \leq b_1 < -b$$

4

$$\rightarrow \text{et ca: } 0 < a_2 < -a \text{ et } 0 \leq -b_1 < b$$

et par récurrence. $\exists! n: (a, b) = (\pm 1, 0) \cdot (18, 5)^n$. c.q.f.d.

n est unique, ε aussi.

2

8 pb

$$a > 0, b < 0. (a, b)^{-1} = \varepsilon \cdot (a, b): a, b > 0 \text{ c.q.f.d.}$$

$$\text{de même } a < 0, b > 0 \text{ — — — — — c.q.f.d.}$$