

I - Contre exemple: $L \cap (M+N) \neq L \cap M + L \cap N$. Soit plans: $L = (\vec{i} + \vec{j})$ 4 ①
 $M = (\vec{i})$, $N = (\vec{j})$.
 Mais: $L \cap (M+N) = L \cap M + L \cap N$.
 $x \in \rightarrow \Rightarrow x \in L$ et $\exists x_1, x_2: x = x_1 + x_2: x_1 \in M, x_2 \in L \cap N \Rightarrow x_1 \in L \cap M \Rightarrow x \in L \cap M + L \cap N$.
 $x \in L \cap M + L \cap N: x = x_1 + x_2 \in L$ et $x_1 \in M, x_2 \in L \cap N$. c.q.f.d. 5 9 p's

II. $d_1 f_{a_1} + d_2 f_{a_2} = 0: a_1 < a_2: n: x < a_2: \Rightarrow -d_1 x - d_2 x + d_1 a_1 + d_2 a_2 = 0$
 en dérivant $\Rightarrow d_1 + d_2 = 0$.
 $a_1 < x < a_2 \Rightarrow +d_1 x - d_2 x - d_1 a_1 + d_2 a_2 = 0$
 en dérivant $\Rightarrow d_1 - d_2 = 0$.
 $\Rightarrow d_1 = d_2 = 0$ c.q.f.d.
 Par récurrence: $d_1 f_{a_1} + \dots + d_n f_{a_n} = 0: a_1 < a_2 < \dots < a_n \Rightarrow d_i = 0$.
 $d_1 f_{a_1} + \dots + d_n f_{a_n} + d_{n+1} f_{a_{n+1}} = 0$. $x > a_{n+1}$ en dérivant $\Rightarrow d_1 + \dots + d_n + d_{n+1} = 0 \Rightarrow d_{n+1} = 0$.
 $a_{n+1} < x < a_{n+2} \dots \Rightarrow d_1 + \dots + d_n - d_{n+1} = 0$
 et donc: $d_i = 0$. 14 15 p's

réclamation complète pour $\mathbb{Z}^2$
 Problème:
 1^{er}. $(\mathbb{Z}^2, +, \times)$ anneau car $(\mathbb{Z}, +)$ est groupe, et la $\times$ est distr. / + de $\mathbb{Z}$. x com. car $+ \text{ et } \times$ sont com. de $\mathbb{Z}$.
 e'p's neutres: $+: (0,0)$ pour $\times: (1,0)$. 2
 $\mathbb{Z}^2$ intègre: $(a,b) \neq (0,0): \Leftrightarrow \begin{matrix} a \neq 0 \\ \text{ou} \\ b \neq 0 \end{matrix}$ 5
 $ac + 13bd = 0$
 $bc + a.d = 0 \Rightarrow \Delta = a^2 + 13b^2 \neq 0$
 car: $\sqrt{13} \notin \mathbb{Q}$.
 $\Rightarrow c = d = 0$. 4 3 p's

2^{er}. $N(a,b) = a^2 - 13b^2$, $N(a,b) = (a,b)(a,-b)$. c.q.f.d.
 (a,b) inversible: $\exists (c,d): (a,b) \times (c,d) = (1,0) \Rightarrow N(a,b) \times N(c,d) = 1 \Rightarrow N(a,b) \in \text{inversible dans } \mathbb{Z}$.
 et réciproque: $N(a,b) = \pm 1 \Rightarrow (a,b) = \pm (a,-b) \Rightarrow (a,b) \times (a,-b) = (1,0)$.
 3^{er}. $x^2 - 13y^2 = 2$: pas de sol. si l'un des 2 est pair: c'est imposs.
 ou résoudre dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.
 la seule sol. est que x et y impairs. $x = 2k+1, y = 2l+1$ on obtient 1 autre
 en classe avec: $x^2 - 13y^2 = -2$. 4
 si $N(a,b) = 4: (a,b) = (c,d) \times (e,f) \Rightarrow \begin{matrix} N(c,d) \in \{\pm 1, \pm 4\} \\ N(e,f) \in \{\pm 1, \pm 4\} \end{matrix}$ c.q.f.d. 2 6 p's

4^{er}. a). E idéal: $E \neq \emptyset; E$ s.o.g. de $\mathbb{Z}^2: \forall x \in \mathbb{Z}^2, \forall a \in E: da \in E$. 2 p's
 b). $(1,0) \notin E$: si $(1,0) \in E$ alors: $(2x+11y+39z, 2y+11x+3z) = (1,0)$.
 $\Rightarrow 2y+11x+3z = 0: \Rightarrow 11x+3z$ pair $\Rightarrow 11y+39z$ pair. (en raisonnant dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$).
 on soustrait: $\Rightarrow 2x+11z+39t = 1$ imposs. 4 p's
 c). E n'est pas principal: si E est principal: $\exists (a,b): (2,0) = (a,b) \times (c,d)$.
 et $(11,3) = (a,b) \times (e,f)$.
 $(a,b) \neq (1,0): \begin{matrix} 4 = N(a,b) \times N(c,d) \\ 4 = N(a,b) \times N(e,f) \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} (a,b) \text{ inversible} \Rightarrow (1,0) \in E \text{ impos.} \\ \text{ou} \\ (c,d) \text{ et } (e,f) \text{ inversibles} \end{matrix}$
 $\Rightarrow (2,0)(c,d)^{-1} = (11,3)(e,f)^{-1}$.
 $\Rightarrow \exists (a_2, b_2): (2,0) \times (a_2, b_2) = (11,3)$.
 $\Rightarrow 2a_2 = 11$ et $2b_2 = 3$ imposs. 6 p's