

L'espace affine euclidien E_3 est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. A toute courbe Γ de E_3 , on associe la courbe Γ' ensemble des centres de courbures de la courbe (Γ) . On étudie les courbes Γ , non planes, dont les courbes associées Γ' sont planes.

I. On considère la courbe Γ_0 ensemble des points $M(\lambda)$ tels que: $\forall \lambda \in \mathbb{R}$:

$$\vec{OM}(\lambda) = \frac{a\sqrt{2}}{\cosh \lambda/a} \vec{i} + [\lambda - a \tanh \lambda/a] \vec{j} + a \tanh \lambda/a \cdot \vec{k} \quad (a \in \mathbb{R}_+^*).$$

- Dessiner les 3 projections de Γ_0 sur les plans de coordonnées.
- Déterminer le trièdre de Frenet en un point quelconque de Γ_0 orientée dans le sens des λ croissants. Calculer le rayon de courbure de Γ_0 au point $M(\lambda)$ et déterminer la courbe Γ'_0 associée à la courbe Γ_0 . (On trouvera une relation très simple entre λ et $d\lambda$).

II. 1°. Soit Γ une courbe non plane arbitraire de courbe associée Γ' . M' étant le centre de courbure de Γ au point M , montrer que la tangente en M à Γ et la tangente en M' à la courbe Γ' sont orthogonales.

2°. p et u étant 2 fonctions réelles d'une variable réelle admettant des dérivées continues p' et u' dans un intervalle I de $\mathbb{R}$, ouvert, qui contient 0, on considère la courbe Γ , ensemble des points $M(\theta)$ définis par:

$$\forall \theta \in I: \vec{OM}(\theta) = \left[\int_0^\theta p(t) \cos u(t) dt \right] \vec{i} + \left[\int_0^\theta p(t) \sin u(t) dt \right] \vec{j} + u(\theta) \cdot \vec{k}.$$

On suppose que la fonction u' , dérivée de la fonction u , est strictement positive dans l'intervalle I . Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que la courbe Γ' associée à la courbe Γ soit une courbe du plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est: $u \cdot [p'^2 + p^2(1+p^2)] - p(1+p^2)p'u' = 0$.
 (On écrira le vecteur tangente unitaire).

Montrer que, si la fonction p , continue, à dérivée continue dans l'intervalle I , est donnée, p et p' ne s'annulant pas dans I , il existe en général des fonctions u telles que la condition précédente soit vérifiée.
 (donner l'expression de u en fonction de p et de $\int \frac{p}{p'}$).

3°. Dans cette question, on propose de déterminer au moyen de l'expression proposée au 2° ci-dessus quelques courbes Γ dont la courbe Γ' associée est une courbe du plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a). Résoudre le problème lorsque p est définie par: $p(\theta) = \frac{2 \sin \theta}{\cos^2 \theta}$ et où $I =]-\pi/2, +\pi/2[$.

Montrer que l'on trouve, en particulier, la courbe Γ_0 (de la partie I). (Moyennant une translation sur l'axe des x). Pour cela, on posera:

$$\theta = -\operatorname{Arctg} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sinh \mu \right).$$

(pour l'intégration, on aura intérêt à faire le changement de variable $v = \operatorname{rg} \theta$ — on s'utilisera le 2°).