

Exercice 1: Décomposer sur $\mathbb{R}$ les fractions rationnelles:

a). $F = \frac{1}{X^4+1}$; b). $G = \frac{X^2+X+7}{(X-1)^4(X^2+X+1)^2}$; c). $H = \frac{X^6-X^3+X+1}{X^5-X^2}$
 (bien présenter les résultats!).

Exercice 2: Soit: $f \in K[X]$: $\deg f \leq 2n$; montrer alors que f s'écrit de manière unique sous la forme:

$$f = \sum_{k=-n}^n a_k (X-a)^{n+k} (X-b)^{n-k} \quad \text{si } a \neq b.$$

(attention à la rédaction!).

Problème 1: Soit $F = \frac{1}{(X^3-1)^3} \in \mathbb{R}(X)$

a). On sait que F peut s'écrire sous la forme:

$$F = \frac{A}{(X-1)^3} + \frac{B}{(X-1)^2} + \frac{C}{X-1} + \frac{u}{(X^2+X+1)^3} \quad \text{où } u \in \mathbb{R}[X].$$

Calculer A , B et C .

b). $F \in \mathbb{C}(X)$ (vu que: $\mathbb{R}(X) \subset \mathbb{C}(X)$). En utilisant la remarque: $F(X) = F(jX) = F(j^2X)$ chercher la décomposition de F sur $\mathbb{C}$.

c). En déduire la décomposition de F sur $\mathbb{R}$.

N.B.: A l'aide de remarques simples, les calculs peuvent se faire facilement.

Problème 2: a). Si A est un anneau commutatif et si:

$\forall i \in [1, n]: (a_i, b_i) \in A^2$, montrer alors que:

$$\exists (a, b) \in A^2: \prod_{i=1}^n (a_i^2 + b_i^2) = a^2 + b^2$$

b). Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et si: $\forall x \in \mathbb{R}: P(x) \geq 0$, montrer alors que: $\exists (A, B) \in \mathbb{R}[X]^2: P = A^2 + B^2$ (à bien justifier).

~~XX~~ (Ecrire P sous la forme: $P = X^2 \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i)^{\alpha_i} \cdot \prod_{j=1}^m [(X + a_j)^2 + b_j^2]^{\beta_j}$.)

c). En déduire, par récurrence sur le degré de P , que, si $P \in \mathbb{R}[X]$

et si: $\forall x \in \mathbb{R}^+: P(x) \geq 0$, alors:

$$\exists (A, B, C, D) \in \mathbb{R}[X]^4: P = A^2 + B^2 + X(C^2 + D^2).$$

Idée du barème: Exercice 1: (4,5): a). 1; b). 2,5; c). 1

Exercice 2: (3); Problème 1 (5,5): a). 2,5; b). 1,5; c). 1,5.

Problème 2: (7): a). 1,5; b). 2; c). 3,5.