

I. Convergence au sens de Cauchy

- 1°) Soit (u_n) une suite de réels, convergente et de limite l .
On pose : $v_n = \frac{1}{n+1} \sum_{p=0}^n u_p$; montrer que la suite (v_n) est convergente et a même limite que (u_n) . On dit que (v_n) converge au sens de Cauchy.
- 2°) On s'intéresse à la réciproque : montrer que si (u_n) est une suite qui converge au sens de Cauchy, alors (u_n) ne converge généralement pas. Cependant, montrer que si la suite (u_n) est monotone, alors la réciproque est vraie.
- 3°) Soit (a_n) une suite qui vérifie : $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_{n+1} - a_n) = l$
déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}$. (utiliser le 1°).

II. Comparaison d'une suite à la somme des termes d'une suite géométrique.

- 1°) Soit (u_n) une suite de réels. On suppose que : $\exists q \in]0, 1[$
 $|u_{n+2} - u_{n+1}| \leq q |u_{n+1} - u_n| \quad \forall n \in \mathbb{N}$
Montrer alors que $|u_{n+1} - u_n| \leq q^n |u_1 - u_0|$
- 2°) Soit $q \in]0, 1[$, montrer que : $1 + q + q^2 + \dots + q^n \leq \frac{1}{1-q}$
et que $q^n + q^{n+1} + \dots + q^{n+p} \leq q^n \frac{1}{1-q}$
- En écrivant $|u_{n+p+1} - u_n| = |u_{n+p+1} - u_{n+p} + u_{n+p} - u_{n+p-1} + \dots + u_{n+1} - u_n|$ et en utilisant le résultat du 1°, montrer que (u_n) est de Cauchy. Donner une majoration de sa limite en fonction de q, u_0 et u_1 .
- 3°) Application à l'étude de la suite définie par :
 $u_0, u_n = a \sin u_{n-1} + b \quad (n \geq 1)$ avec $0 < a < 1$. Montrer que la limite est indépendante de u_0 .

- 7 III - On pose : $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$. Soit $V =$ s.e.v. engendré par $1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^n, \dots$. Montrer que V est de dimension finie; que 26 est sa dimension ?