

I. Exercice:

Soit l'équation: $z^2 - 2pz + 1 = 0$ avec $p = \sin \varphi + i \cos \varphi$.

On appelle z' et z'' les 2 racines (distinctes ou non) (On a: $z' + z'' = 2p$ et $z' z'' = 1$)
1°. Chercher le module et l'argument de $z' - p$ et $z'' - p$.

2°. On suppose $\cos \varphi < 0$. Montrer alors que $z' + i$ et $z'' + i$ ont même module, et que $z' - i$, $z'' - i$ ont même argument. (calculer z' et z'').

Cas où $\cos \varphi > 0$?

II. (Chercher le rang de la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ définis par:

$$x_1 = (1, 0, -\sin \alpha, -\cos \alpha); x_2 = (0, 1, -\cos \alpha, \sin \alpha)$$

$$x_3 = (1, 0, \sin \beta, -\cos \beta); x_4 = (0, 1, -\cos \beta, -\sin \beta).$$

III. Fractions continues:

soit $x \in \mathbb{R}$, on définit 2 suites: $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ et $(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$ de la façon suivante: $a_0 = [x]$, $x_1 = \frac{1}{x - a_0}$ ($x \neq a_0$)

$a_1 = [x_1]$; $x_2 = \frac{1}{x_1 - a_1}$ ($x_1 \neq a_1$) etc..., $x_n = \frac{1}{x_{n-1} - a_{n-1}}$ avec $a_{n-1} = [x_{n-1}]$.
($[x]$ désigne la partie entière de x), x .

1°. Montrer que si x est rationnel non entier, alors x_1 est rationnel ainsi que tous les termes que l'on peut définir dans la suite (x_n) .

Si $x = \frac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ avec $p \wedge q = 1$ alors, le dénominateur de x_1 est strictement inférieur à q . En déduire l'existence d'un N : $x_N = \frac{p_N}{q_N}$.

$$\text{On a alors: } x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_{N-1} + \frac{1}{a_N}}}} \quad (1).$$

① est dit: développement de x en fractions continues.

Montrer que l'écriture de $x \in \mathbb{Q}$ est unique lorsque x est donné sous la forme ①.

2°) Si x est irrationnel alors, on pourra déterminer les deux suites (x_n) et (a_n) par le procédé déterminé au 1°).

Montrer (par récurrence sur n) que x s'écrit: $x = \frac{A_n x_n + A_{n-1}}{B_n x_n + B_{n-1}}$; (où A_n et B_n sont des entiers relatifs).

Déterminer A_n et B_n par récurrence*; calculer $D_n = A_n B_{n+1} - A_{n+1} B_n$, en déduire que pour tout n , A_n et B_n sont premiers entre eux.

Montrer que la suite (B_n) est strictement croissante.

* A_n en fonction de A_{n-1} et A_{n-2} ; de même que B_n .