

I. 20p²

- 1°. $\Delta' = p^2 - 1 = \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi - 1 + 2i \sin \varphi \cos \varphi = 2 \cos \varphi [-\cos \varphi + i \sin \varphi]$. (6p²)
- si $\cos \varphi < 0$: $|z' - p| = |z'' - p| = \sqrt{-2 \cos \varphi}$ $\text{Arg}(z' - p) = -\frac{\varphi}{2} [2\pi]$ or $\text{Arg}(z'' - p) = \pi - \frac{\varphi}{2} [2\pi]$.
- si $\cos \varphi > 0$: $|z' - p| = |z'' - p| = \sqrt{2 \cos \varphi}$ $\text{Arg}(z' - p) = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} [2\pi]$ or $\text{Arg}(z'' - p) = \frac{3\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} [2\pi]$.
- 2°. $\cos \varphi < 0$. (on prend $\varphi \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[\Rightarrow \frac{\varphi}{2} \in]\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}[$) $z = p + \varepsilon \sqrt{-2 \cos \varphi} (\cos \frac{\varphi}{2} - i \sin \frac{\varphi}{2})$; $\varepsilon = \pm 1$
 φ définit modulo $2\pi \Rightarrow \frac{\varphi}{2}$ déf. modulo π . $z = z'$ ou z''
- $z' + i = \underbrace{2 \cos \frac{\varphi}{2} (\sin \frac{\varphi}{2} + i \cos \frac{\varphi}{2})}_{p+i} + \varepsilon \sqrt{-2 \cos \varphi} (\cos \frac{\varphi}{2} - i \sin \frac{\varphi}{2}) \Rightarrow |z' + i| = \sqrt{4 \cos^2 \frac{\varphi}{2} - 2 \cos \varphi} = \sqrt{2}$.
- $z' - i = \underbrace{2 \sin \frac{\varphi}{2} (\cos \frac{\varphi}{2} - i \sin \frac{\varphi}{2})}_{p-i} + \varepsilon \sqrt{-2 \cos \varphi} (\cos \frac{\varphi}{2} - i \sin \frac{\varphi}{2}) \Rightarrow \sin \frac{\varphi}{2} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\text{Arg}(z' - i) = \frac{\varphi}{2} [\pi]$. (14p²)
- $\cos \varphi > 0$, on aura : $\text{Arg}(z' + i) = \frac{\varphi}{2} [\pi]$ et $|z' + i| = \sqrt{2}$.

II. 10p⁶

- $\pi g(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) = \pi g(\pi_1, \pi_2, \pi_3 - \pi_1, \pi_2 - \pi_1) = 2 + \pi g(\pi_3 - \pi_1, \pi_2 - \pi_1)$
- $\pi g(\pi_3 - \pi_1, \pi_2 - \pi_1) = \pi g[(\cos \beta + i \sin \beta, \cos \alpha - i \sin \alpha), (\cos \beta - i \sin \beta, \cos \alpha + i \sin \alpha)] = \pi g(\pi'_3, \pi'_4)$.
- $\pi'_3 = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} (\cos \frac{\alpha - \beta}{2}, -\sin \frac{\alpha - \beta}{2})$
- $\pi'_4 = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} (\sin \frac{\alpha - \beta}{2}, \cos \frac{\alpha - \beta}{2})$ d'où : $\pi g(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) = \begin{cases} 4 \text{ si } \alpha + \beta \neq 0 [2\pi] \\ 2 \text{ si } \alpha + \beta = 0 [2\pi] \end{cases}$.

III. 50p⁶

- 1°. (12p⁶)
- $x \in \mathbb{Q}$: alors $x_1 = \frac{1}{x - a_0} \in \mathbb{Q}$ et par récurrence : $x_n \in \mathbb{Q}$.
- $[x] = a_0 \Rightarrow 0 \leq \frac{p}{q} - a_0 < 1 \Rightarrow 0 \leq p - a_0 q < q$: et $x_1 = \frac{1}{x - a_0} = \frac{q}{p - a_0 q} \Rightarrow$ le dénom. de x_1 est $\leq q$.
- par récurrence : si $x_n = \frac{p_n}{q_n}$; $0 < q_n \leq q_{n-1} - 1$ donc, $\exists N (\leq q)$ $q_N = 1 \Rightarrow x_N \in \mathbb{N}$.
- d'où (1).
- unicité de l'écriture : on a $a = \frac{1}{a'_1 + \frac{1}{a'_2 + \frac{1}{a'_3 + \dots + \frac{1}{a'_N}}}}$ < 1 donc : si on a 2 écritures, on aura : $a_0 = a'_0$ et par récurrence : $a_p = a'_p$.

- 2°. si $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$: alors $\forall n \in \mathbb{N}$: x_n est défini. (10p⁶)
- Par récurrence : $x = a_0 + \frac{1}{x_1} = \frac{a_0 x_1 + 1}{x_1}$; si $x = \frac{A_{n-1} x_{n-1} + A_{n-2}}{B_{n-1} x_{n-1} + B_{n-2}}$ or : $x_{n-1} = a_{n-1} + \frac{1}{x_n}$.
- d'où : $x = \frac{(A_{n-1} a_{n-1} + A_{n-2}) x_n + A_{n-1}}{(B_{n-1} a_{n-1} + B_{n-2}) x_n + B_{n-1}}$ cqfd : d'où : $A_n = a_{n-1} A_{n-1} + A_{n-2}$ avec $A_1 = a_0, A_0 = 1$
 $B_n = a_{n-1} B_{n-1} + B_{n-2}$ avec $B_1 = 1, B_0 = 0$
- Par récurrence : $D_0 = A_0 B_1 - A_1 B_0 = 1$.
- si $D_{n-1} = A_{n-1} B_n - A_n B_{n-1} = (-1)^{n-1}$ alors : $D_n = A_n [a_n B_{n-1} + B_{n-2}] - B_n [a_n A_{n-1} + A_{n-2}] = -[A_{n-1} B_{n-1} - A_n B_{n-2}]$
- On a l'identité de Bézout : donc $A_n \wedge B_n = 1$
- $B_n > B_{n-1}$? : on a : $x_n = \frac{1}{x_{n-1} - a_{n-1}}$ et $x_{n-1} - a_{n-1} < 1 \Rightarrow x_n > 1 \Rightarrow a_n \geq 1$.
- d'où : $B_n = a_{n-1} B_{n-1} + B_{n-2} > B_{n-1} + B_{n-2}$ si $n \geq 2$ alors $B_n > B_{n-1}$.