

I. Exercice: Etude de $f(x) = \operatorname{Arctg} \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}$

- Domaine de déf. de f , continuité de f ?
- Calcul de f' (en donner la forme la plus simple; on pourra distinguer différents cas).
- A l'aide du b, donner une forme plus simple de f ; représentation graphique (on précisera les $\frac{\pi}{2}$ -tangentes aux points particuliers mis en évidence au b ainsi que la tangente au point $(0,0)$).

II. Calcul de $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} = \lim_{p \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{p^2}\right)$ (bien justifier les résultats).
On suppose dans toute la suite que $n = 2p+1$.

1°) Calculer $\sin(na)$ à l'aide de la formule de Moivre; en déduire:

$$\sin(na) = \sin^n a \left[C_n^1 \operatorname{ctg}^{n-1} a - C_n^3 \operatorname{ctg}^{n-3} a + \dots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} C_n^{\frac{n-1}{2}} \operatorname{ctg} a + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \right]$$

2°) En déduire que les racines de l'équation:

$$C_{2p+1}^1 x^p - C_{2p+1}^3 x^{p-1} + \dots + (-1)^p = 0 \text{ sont: pour } k \in [1, p]: x_k = \operatorname{ctg}^2 \frac{k\pi}{n}$$

En utilisant une relation de trigonométrie, calculer: $\sum_{k=1}^p \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{n}}$

3°) On rappelle que: $\forall a \in]0, \frac{\pi}{2}[: \sin a < a < \operatorname{tg} a$

Montrer alors que l'on a: $\frac{1}{6}(n-1)(n-2) < \sum_{k=1}^p \left(\frac{n}{k\pi}\right)^2 < \frac{1}{6}(n-1)(n+1)$

En déduire $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} (= \lim_{p \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{p^2}))$.

En décomposant cette somme en 2 calculer: $\lim_{R \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^R \frac{1}{(2k)^2}$ et $\lim_{R \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^R \frac{1}{(2k+1)^2}$.

III. a) Montrer que la suite $S_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n+k}$ est décroissante et qu'elle a une limite finie qui sera notée S .

b) Soit: $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et telle que $f'_d(0) = l$ existe et que $f(0) = 0$.

Montrer que la suite $\sigma_n(f) = f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{1}{n+1}\right) + \dots + f\left(\frac{1}{2n}\right)$ tend vers lS .

(à bien rédiger).

c) Calculer $\sigma_n(f)$ lorsque $f(x) = \log(1+x)$ et en déduire que $S = \log 2$.

d) Plus généralement, quelle est la limite, lorsque $n \rightarrow +\infty$ de:

$$\sigma_n(h, l) = \sum_{p=0}^{2n} f\left(\frac{1}{n+p}\right) ? \quad (h \in \mathbb{N}, \text{ donné}).$$

e) Application: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ où $u_n = e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{1}{n+1}} + \dots + e^{\frac{1}{2n}} - n$.

Idée du barème: I (6): a). 1; b). 2,5; c). 2,5.

II. (6,5): 1°). 1,5; 2°). 1,5; 3°). 3,5.

III. (3,5): a). 1; b). 2,5; c). 1; d). 1,5; e). 1,5.