

I. Exercice:

1°) Chercher le développement limité de e^x à l'ordre n au voisinage de $a \in \mathbb{R}$.

2°) Etude et représentation graphique de : ~~fonction~~
 $f(x) = (x-4)e^{\frac{x-2}{x}}$.

II. Problème:

A. Soit f la fonction définie sur $[0, \pi]$ par : $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{5-4\cos x}}$.
 On désignera par (G) son graphe.

1°) Déterminer le développement limité de $f(x)$ à l'ordre 5 au voisinage de 0, ainsi que le développement limité à l'ordre 1 au voisinage de π .

2°) Etudier le signe de $f(x) - \sin x$, x variant dans $[0, \pi]$. En déduire le signe de $f(x) - x$ pour tout x dans $[0, \pi]$.

Pour quelles valeurs de x a-t-on $f(x) = x$?

3°) Etudier les variations de f ; tracer (G) .

4°) On pose sur $]0, \pi[$: $r(x) = \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{x}$, $s(x) = \frac{1}{f(x)^2} - \frac{1}{x^2}$.

Déterminer le développement limité de $r(x)$ à l'ordre 4 au voisinage de 0 et celui de $s(x)$ à l'ordre 3 au voisinage de 0.

B. Soit g la fonction définie sur $[0, \pi]$ par :

$$\forall x \in [0, \pi] : g(x) = \arccos\left(\frac{4-5\cos x}{5-4\cos x}\right).$$

On désignera par (G') son graphe.

1°) Vérifier que g est bien définie. Calculer, en fonction de x , $\cos(g(x))$ et $\sin(g(x))$.

2°) Déterminer la dérivée g' de g sur $]0, \pi[$ (intervalle ouvert). Déterminer la limite de $g'(x)$ lorsque x tend vers 0, ainsi que vers π . Déterminer le tableau de variation de g . Tracer (G') ; on précisera sa concavité.