

I. - Espaces ultramétriques:

Soit E un ensemble et $d: E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+$ satisfaisant:

- i) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$; ii) $\forall (x, y) \in E^2$ $d(x, y) = d(y, x)$;
 iii) $\forall (x, y, z) \in E^3$: $d(x, y) \leq \sup[d(x, z), d(z, y)]$.

1°) Montrer que d est une distance dans E ; montrer que si $d(x, z) \neq d(y, z)$ alors : $d(x, y) = \sup[d(x, z), d(z, y)]$.

2°) Montrer que pour tout réel $r > 0$, les boules $B(x, r)$ et $\overline{B}(x, r)$ sont des parties à la fois ouvertes et fermées de E .

3°) Montrer que : $\forall y \in B(x, r)$, on a : $B(x, r) = B(y, r)$ et que $\forall y \in \overline{B}(x, r)$ $\overline{B}(x, r) = \overline{B}(y, r)$.

4°) Montrer que si 2 boules (ouvertes ou fermées) ont 1 point commun, l'une est contenue dans l'autre.

5°) Montrer que les boules ouvertes distinctes de rayon r qui sont contenues dans 1 boule fermée : $\overline{B}(a, r)$ constituent une partition de cette boule fermée.

II. - Polynôme d'interpolation de Lagrange:

On se place dans $K[X]$ où K est 1 corps commutatif:

1°) Si $a \neq b$, chercher le reste de la division de $f \in K[X]$ par $(X-a)(X-b)$ en fonction de $f(a)$ et $f(b)$ (on trouve bien un polynôme du 1^{er} degré).

2°) Généralisation : chercher le reste de la division de f par $(X-a_1)(X-a_2)\dots(X-a_n)$ en fonction de $f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n)$ (les $a_i \in K$ sont tous différents).

3°) Montrer qu'il existe un unique polynôme g de $d^\circ \leq n-1$ prenant pour $a_i, i \in \{1, \dots, n\}$ des valeurs b_i quelconques (c.a.d. $g(a_i) = b_i$).

A l'aide du 2°), chercher à expliciter ce polynôme dit polynôme d'interpolation de Lagrange.