

I. Exercice 1:

On rappelle qu'une valeur propre λ de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une racine du polynôme caractéristique: $P(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ et qu'un vecteur propre de A est une matrice unicolonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ non nulle telle que: $\exists \lambda \in \mathbb{C}: AX = \lambda X$.

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 & -7 \\ 5 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

II. Exercice 2:

Calculer l'inverse de la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

On écrit M^{-1} pour $n = 2, 3, 4$, puis on donne l'écriture générale de M^{-1} .

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

III. Problème:

Soit une suite (A_n) de matrices carrées de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ définie par la donnée de A_1 et la relation de récurrence: $A_{n+1}A_n = A_n - I_p$. (1)

1°. Montrer que (A_n) est périodique lorsque $A_1 = \lambda I_p$ avec: $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq 1$.

2°. Dans l'hypothèse où la suite (A_n) existe (i.e. A_{n+1} est déterminée de manière unique par (1)), calculer les produits $A_3 A_2 A_1$ et $A_4 A_3 A_2 A_1$; en déduire que (A_n) est périodique.

3°. Montrer que: A_n régulière $\Rightarrow A_{n+1}$ est bien définie; l'exprimer au moyen de A_n et A_n^{-1} ; en déduire que toutes les matrices de (A_n) commutent.

4°. Montrer l'équivalence:

la suite (A_n) existe $\Leftrightarrow A_1$ et $A_1 - I_p$ inversibles.