

I. - Dans tout le problème, i désignera le nombre complexe réel tel que $i^2 = -1$.

1°. Déterminer les nombres complexes z tels que $z^2 = 2i$.

2°. Trouver les nombres complexes qui sont racines du polynôme : $f(X) = X^2 - 4X + 5$.

3°. Montrer que le polynôme : $g(X) = X^3 - (1+2i)X^2 - 3X + 2i - 1$ a une racine commune α , que l'on déterminera, avec le polynôme $f(X)$.

4°. Quel est le quotient de la division de $g(X)$ par $X - \alpha$ suivant les puissances décroissantes (on posera la division) ?

5°. Décomposer le polynôme $g(X)$ en un produit de facteurs du 1^{er} degré.

6°. Déterminer les polynômes $h(X)$ à coefficients dans $\mathbb{C}$ de degré minimal qui sont multiples communs de $f(X)$ et du polynôme : $l(X) = X^3 - (1+2i)X^2 - 3X + a$

Discuter suivant les valeurs de a .

II - 1°. Soit le polynôme $p(X)$ de degré n , dont le terme constant n'est pas nul et dont les racines (distinctes ou non), sont $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Montrer que $p(X) = p(0) \cdot \prod_{n=1}^n \left(1 - \frac{X}{x_n}\right)$.

2°. On considère le polynôme : $q_m(X) = \frac{1}{2i} \left[\left(1 + i\frac{X}{m}\right)^m - \left(1 - i\frac{X}{m}\right)^m \right]$

Montrer que les racines de $q_m(X)$ sont données par : $\left(\frac{m + iX}{m - iX}\right)^m = 1$ et sont $x_n = m \operatorname{tg} \frac{n\pi}{m}$ ($n = 0, 1, \dots, m-1$)

3°. Montrer que $q_m(X) = X p(X)$ où on a : $p(0) = 1$.

On prend $m = 2p-1$, montrer que les racines de $p(X)$ sont $x_n = \pm (2p-1) \operatorname{tg} \frac{n\pi}{2p-1}$ ($n = 1, 2, \dots, p-1$).

En déduire : $q_{2p-1}(X) = X \cdot \prod_{n=1}^{p-1} \left[1 - \frac{X^2}{(2p-1)^2 \operatorname{tg}^2 \frac{n\pi}{2p-1}} \right]$

III - Décomposer sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle :

$$f(X) = \frac{3X+8}{X(X^2+2X+2)^3}$$