

Exercice 1

Démontrer les formules:

$$S = \cos a + \cos(a+h) + \dots + \cos(a+(n-1)h) = \frac{\sin \frac{nh}{2} \times \cos(a + \frac{(n-1)h}{2})}{\sin \frac{h}{2}}$$

$$S' = \sin a + \sin(a+h) + \dots + \sin(a+(n-1)h) = \frac{\sin \frac{nh}{2} \times \sin(a + \frac{(n-1)h}{2})}{\sin \frac{h}{2}}$$

I. On considère les deux sommes: $x = \cos 3a + \cos 5a + \cos 7a + \cos 11a$

$$y = \cos a + \cos 9a + \cos 13a + \cos 15a \quad \text{où } a = \pi/17$$

Calculer $(x+y)$ et xy . En déduire les valeurs de x et de y , exprimées à l'aide de radicaux carrés. On pose ensuite: $z = \cos 3a + \cos 5a$ $t = \cos 7a + \cos 11a$

$$u = \cos a + \cos 13a \quad v = \cos 9a + \cos 15a.$$

Calculer zt et uv . En déduire les valeurs de z, t, u, v .

Déduire enfin de ce qui précède la valeur de $\cos \pi/17$ exprimée par radicaux carrés.

II. n étant un entier positif fixé, on pose, j étant un entier relatif, $a_j = (-1)^j \cos \frac{j\pi}{2n+1}$

I) Comparer $a_j, a_{j+2n+1}, a_{2n+1-j}$

Etablir les formules:

$$\begin{aligned} (1) \quad & a_1 + a_2 + \dots + a_n = -1/2 \\ (2) \quad & 2a_j a_k = a_{j+k} + a_{j-k} \\ (3) \quad & 2a_j^2 = 1 + a_{2j} \end{aligned}$$

2) Utiliser ces formules pour calculer $\cos \pi/5$. (On ne demande pas d'en donner de valeur décimale approchée.)

3) Dans toute cette partie, on prend $n=8$.

En partant de a_1 , (3) permet le calcul de a_2 , et, en répétant l'opération, de a_4 , puis de a_8 ; si on continuait, on retrouverait la même suite de valeurs.

Ceci conduit à considérer les sommes $x_1 = a_1 + a_2 + a_4 + a_8$ et $x_2 = a_3 + a_5 + a_6 + a_7$.

Calculer $(x_1 + x_2)$ et $x_1 x_2$. La formule (3) permet d'obtenir une relation (4) entre a_j et a_{4j} que l'on écrira. Supposant connu un a_j , (4) permet de calculer a_{4j} ; qu'obtient-on en recommençant? Montrer que l'on peut ainsi partager l'ensemble des a_j en quatre sous-ensembles; deux de ces sous-ensembles formant x_1 , les deux autres x_2 . Calculer les sommes des deux éléments de chacun de ces sous-ensembles. En déduire enfin $\cos \pi/17$. Voyez-vous un rapport entre ce mode de calcul et celui de la première partie?

III.

On conserve les notations de la deuxième partie et on prend $n=3$.

Calculer: $(a_1 + a_2 + a_3), (a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1), a_1 a_2 a_3$.

Former l'équation du troisième degré admettant pour racines a_1, a_2, a_3 . Montrer qu'elle n'a aucune racine rationnelle. Qu'en résulte-t-il pour $\cos \pi/17$?

IV. On conserve les notations de la deuxième partie. Former la relation (5) qui lie a_j et a_{3j} . On prend $n=6$ et on pose:

$$x_1 = a_1 + a_2 + a_3, \quad x_2 = a_4 + a_5 + a_6, \quad x_3 = a_7 + a_8 + a_9, \quad x_4 = a_{10} + a_{11} + a_{12}$$

En s'inspirant de ce qui précède, ramener le calcul des a_j à la résolution d'équations algébriques de degrés 2 et 3 que l'on écrira. (On ne demande pas de résoudre ces équations.)

V. Gauss a démontré que la construction des polygones réguliers à nombre de côtés premier, de la forme $(2n+1)$ se ramène à la résolution d'équations algébriques dont les degrés sont les facteurs premiers de n . Vérifier que ce théorème est vrai pour un polygone régulier de 19 cotés. Il pourra être avantageux, faisant $n=9$, de considérer les trois sommes:

$$(a_1 + a_7 + a_9), (a_4 + a_6 + a_9), (a_2 + a_3 + a_5).$$

Traiter la même question pour un polygone régulier de 11 cotés. Il est conseillé, dans ce cas d'écrire le quotient de: $x^{11} - 1$ par $x - 1$, puis de transformer l'équation de degré 10 obtenue en égalant à 0 le quotient précédent en posant: $x + 1 = 2a$

On ne demande pas de rechercher une démonstration générale du théorème de Gauss.

VI. p et q étant deux entiers premiers entre eux montrer l'existence de deux entiers h et m tels que: $h \frac{2\pi}{p} - m \frac{2\pi}{q} = \frac{2\pi}{pq}$. En déduire que si on sait construire les polygones

réguliers de p cotés et q cotés inscrits dans un cercle de rayon 1, on sait aussi construire les polygones réguliers de pq cotés inscrits dans le même cercle. Il est en outre évident qu'on sait construire les polygones réguliers de $2n$ cotés. En admettant le théorème de Gauss énoncé à la 5^e partie, dresser la liste des polygones réguliers, ayant au plus 50 cotés, dont la constructions se ramène à la résolution d'équations de degré inférieur ou = à 3.

(Inst. Nat. Agronomique, 1970.)