

I. Soit E : e.v. sur $\mathbb{R}$ de dim n ($n \geq 2$) ; $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E .
 Si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$, on définit la forme bilinéaire symétrique f par : $f(x, y) = x_n y_n - x_{n-1} y_{n-1} - \dots - x_1 y_1$.

1°/ a). Montrer que f est non dégénérée.

b). Une base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ est dite base type si :

$i \neq j \Rightarrow f(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$; $i = j = n \Rightarrow f(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 1$; $i = j < n : f(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = -1$.

Est-ce que $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base type ?

2°/ Soit $t \in E : f(t, t) > 0$

a). On pose : pour $y \in E : y' = y - \frac{f(t, y)}{f(t, t)} t$; montrer que $f(t, y') = 0$.

En déduire, après avoir démontré l'inégalité : $(x_n y'_n + \dots + x_1 y'_1)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i'^2 \right)$
 que : si $y' \neq 0 : f(y, y') < 0$.

b). Démontrer que : $\forall y \in E : f(t, t) \cdot f(y, y) \leq f(t, y)^2$. Dans quel cas a-t-on égalité ?

c). Soit $F_t : E \times E \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto F_t(x, y) = -f(x, y) + 2 \frac{f(t, x) f(t, y)}{f(t, t)}$.

i). Démontrer que F_t est une forme bilinéaire symétrique (donner la raison).

ii). Démontrer que F_t est non dégénérée positive si : $f(t, t) > \frac{1}{2}$.

iii). Démontrer que, s'il existe une base type dont t est l'un des vecteurs, cette base est orthonormée pour F_t .

3°/ On rappelle qu'étant donnée une forme quadratique Q sur E , non dégénérée positive, et un vecteur $d_n : Q(d_n) = 1$, il existe au moins une base orthonormée pour Q dont le n ième vecteur est d_n . Soit τ un vecteur de E tel que : $f(\tau, \tau) > 0$; démontrer qu'il existe au moins une base type : $(d_1, \dots, d_n)$ telle que d_n est colinéaire à τ .

II. Soient $(f, g) \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})^2$, on définit la forme bilinéaire symétrique : $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t) g(t) \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

1°/ Montrer que $\langle f, g \rangle$ est bien défini, et que, sur $\mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$ cette forme bilinéaire symétrique est non dégénérée positive.

2°/ Pour f deux fois continûment dérivable sur $[-1, +1]$, on pose : $(Lf)(x) = (1-x^2) \cdot f''(x) - x f'(x)$.

a). Donner une relation entre Lf et $\left[\sqrt{1-x^2} f'(x) \right]'$.

b). En déduire que si f et g sont 2 fois continûment dérivables, on a : $\langle Lf, g \rangle = \langle f, Lg \rangle$.

3°/ Soit $E_n = \{ \text{fonctions polynomiales de } d^0 \leq n \}$. Montrer que $L(E_n) \subset E_n$.
 En déduire que si $P \in E_n$ et $d^0 P = n$, et si $\forall x \in [0, n-1], \langle x^x, P \rangle = 0$, alors
 $\exists \lambda_0 \in \mathbb{R} : L P + \lambda_0 P = 0$: donner la valeur de λ_0 . (montrer que $L P + \lambda_0 P$ est