

orthogonal à tout vecteur de E_n .

4° On pose: $P_n(x) = (-1)^n \cdot \frac{2^n n!}{(2n)!} \sqrt{1-x^2} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x^2)^{n-1/2}]$ $n \geq 1$ or $P_0 = 1$.

a). En appliquant la formule de Leibnitz à $f(x) = (1-x^2)^{n-1/2}$ et $g(x) = (1-x^2)^{n-1/2}$, montrer que P_n est un polynôme de d° n et que: $P_n(1) = 1$.

b). Montrer que: $\forall x \in [0, n-1]: \langle P_n, x^n \rangle = 0$.
(intégrer par parties).

En déduire que, si $m \neq n: \langle P_m, P_n \rangle = 0$ et $L P_n + d_n P_n = 0$.

c). Dans E_n , que penser de la famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$?

III - Soit f une fonction à valeurs complexes; et: $\forall x \in \mathbb{R}^+$,

$f \in \mathcal{F}([0, x], \mathbb{C})$; on dit que $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ convergessi: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt$ existe.

1° Montrer que, si $f = g + ih$ où $g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$; $h \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, alors:
 $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ convergessi: $\int_0^{+\infty} g(t) dt$ et $\int_0^{+\infty} h(t) dt$ convergent.

2° On pose: $f(t) = e^{it^2}$; montrer, à l'aide d'un changement de variable et d'une intégration par parties que: $\int_0^{+\infty} e^{it^2} dt$ converge.

Idee du barème:

I [2,5] 1° (1) a) 0,5, b) 0,5; 2° (5) a) 2; b) 1; c) 2; 3° (1,5)

II [9,5] 1° (1,5); 2° (1,5) a) 0,5; b) 1; 3° (1,5); 4° (5) a) 2; b) 2,5; c) 2

III [3] 1° (1); 2° (2).