

I. Soit I un intervalle borné de $\mathbb{R}$, de bornes a et b ($b-a = \ell > 0$) fermé ou ouvert ou semi-ouvert et f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ deux fois dérivable dans I . On suppose f et f'' bornées dans I . Soit $M_0 = \sup_{x \in I} |f(x)|$ et $M_2 = \sup_{x \in I} |f''(x)|$.

1°. Soit x_0 un point de $\overset{\circ}{I}$, λ un réel > 0 tel que $J(x_0, \lambda) =]x_0 - \lambda, x_0 + \lambda[$ soit inclus dans I , et x un point quelconque de $J(x_0, \lambda)$. Calculer les différences $f(x_0 + \lambda) - f(x)$ et $f(x_0 - \lambda) - f(x)$ en utilisant la formule de Taylor-Lagrange. Démontrer que :

$$\forall x \in J(x_0, \lambda) : |f'(x)| \leq \frac{M_0}{\lambda} + \lambda M_2$$

2°. λ étant fixé et tel que $0 < \lambda \leq \ell$, démontrer que :

$\forall x \in I, \exists \lambda \in \overset{\circ}{I}, x \in J(x, \lambda)$. (Faire un dessin, puis ensuite construire une démonstration rigoureuse). En déduire que f' est bornée dans I et que si $M_1 = \sup_{x \in I} |f'(x)|$ on a : $M_1 \leq \frac{M_0}{\lambda} + \lambda M_2$.

3°. Démontrer que : $\ell \geq \sqrt{\frac{M_0}{M_2}} \Rightarrow M_1 \leq 2\sqrt{M_0 M_2}$.

(On pourra étudier la fonction : $\lambda \mapsto \frac{M_0}{\lambda} + \lambda M_2$ ($\lambda > 0$)).

4°. Vérifier l'implication précédente lorsque $I =]0, 1[$ et $f(x) = x^m + k$ (k constante réelle, $m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$). Trouver qu'il existe des fonctions f pour lesquelles $M_1 < 2\sqrt{M_0 M_2}$ et des fonctions f pour lesquelles $M_1 = 2\sqrt{M_0 M_2}$ (avec $\ell \geq \sqrt{\frac{M_0}{M_2}}$).

II. Étudier la fonction : $f_a : x \mapsto \operatorname{Arctg} \frac{a\sqrt{3}}{2x-a} + \operatorname{Arctg} \frac{x\sqrt{3}}{2a-x}$
où $a \in \mathbb{R}^*$. (continuité, dérivabilité, représentation graphique)

III. Soit λ un paramètre réel, on considère sur l'intervalle $[0, 1]$ la fonction $f_\lambda(x) = x^\lambda \sin \pi x$.

Discuter suivant les valeurs de λ réel :

1°. le domaine de définition de f_λ ainsi que les valeurs de f_λ en 0 et en 1 (quand elles sont définies).

2°. le sens de variation de f_λ pour $\lambda \geq 0$ et $\lambda \leq -1$

(pour étudier le signe de $f'_\lambda(x)$, on étudiera les variations de $g(x) = \lambda \operatorname{tg} \pi x + \pi x$; on ne cherchera pas à calculer les valeurs de x pour lesquelles $g(x) = 0$).

3°. les pentes des $\frac{1}{2}$ tangentes aux p^{ts} $x = 0$ et $x = 1$ (quand elles existent) de la courbe représentative de f_λ (on donne : $\sin x = x \wedge x = \frac{\pi}{6}$ (en 0)).

Barème : I : [9] 1°. 2 ; 2°. 2,5 ; 3°. 1,5 ; 4°. 3. II : [4]

III : [7] 1°. 1,5 ; 2°. 3,5 ; 3°. 2.