

I. Soit la forme différentielle $\omega = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ avec :

$P(x, y) = \frac{y + \log|x| - 1}{y}$ et $Q(x, y) = \frac{x \log|x|}{y^2}$. Déterminer une fonction d'une variable h telle que $\omega h(x)$ soit la différentielle d'une fonction F que l'on précisera.

2° Résoudre l'équation différentielle (E) : $x \log|x| \cdot y' = y(1 - \log|x|) - y^2$.
On demande cette résolution de 2 manières différentes :

a). en utilisant la 1^{ère} question

b). en effectuant le changement de fonction inconnue : $y = \frac{1}{z}$.

3° On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$, vérifiant (E) sur $\mathbb{R}^*$, telle que : $f(-\frac{1}{2}) = \log 2$ et $f(1) \neq 0$. Prouver l'existence et l'unicité de cette fonction et préciser $f(1)$ ainsi que $f'(1)$. Étudier f ; représentation graphique.

II. 1° Soit la fonction : $f(x) = \frac{1-x}{2\sqrt{x}} \log \left| \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \right|$. Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}^+$; montrer que f vérifie :

$$\textcircled{1} : 2xy' + \frac{1+x}{1-x} y = 1$$

2° Représentation graphique de f . (préciser $f(1)$ et la tangente au point correspondant)

3° a). Intégrer $\textcircled{1}$ sur chacun des intervalles : $]-\infty, 0[$; $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$

b). Chercher la solution $g(x)$ de $\textcircled{1}$ continue sur $\mathbb{R}$; est-elle dérivable ?

c). Déterminer le développement limité de g à l'ordre n au voisinage de 0.

III. Soit l'équation différentielle : (E) : $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$.

1° Quelle relation sur p, q et q' doit-on avoir pour que (E) admette 2 solutions particulières u, v vérifiant $uv = a$, où $a \in \mathbb{R}$.

2° Montrer que l'on obtiendrait la même condition en imposant l'existence de 2 solutions particulières u et v vérifiant soit $u^2 + v^2 = a$ ou $u^2 + v^2 = a$.

3° Application : $y'' + ay' + e^{-2ax} y = 0$. (E')

Pour résoudre (E') soit u une solution particulière ; chercher z telle que : $y = u \cdot z$ soit la solution particulière du 1^{er} associée à u .

Trouver les fonctions solutions de (E') vérifiant les conditions du 2^{ème}.

(On pourra opérer sur (E)).