

I. Etudier la courbe définie en polaire par : $r = \frac{\sin \theta}{2 \cos \theta - 1}$
(Préciser la concavité).

II. Dans le plan affine euclidien orienté, muni d'un repère orthonormal, on considère le cercle de rayon R et de centre O , puis, sur ce cercle, les deux points P et Q tels que : $(\vec{OP}, \vec{OQ}) = t$; $(\vec{OP}, \vec{OQ}) = nt$ (où n est un entier relatif distinct de $-1, 0, 1$ et t un paramètre réel).

Les points étant affectés respectivement des coefficients réels λ et μ liés par la relation $\lambda + \mu = 1$, on appelle M leur barycentre.

1°. Montrer que l'on peut déterminer λ et μ en fonction de n de façon que la courbe Γ_n décrite par M lorsque t varie admette en M , quel que soit t , la droite PP' pour tangente. Désormais, λ et μ garderont les valeurs ainsi déterminées.

2°. Montrer que Γ_n est globalement invariante dans la symétrie orthogonale d'axe $x'Ox$ ainsi que la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{n-1}$. En déduire une méthode pour l'étude et la construction de Γ_n .

3°. Construire Γ_5 et Γ_{-4} (d'après ENI travaux menés et réalisés semestriels de Strasbourg, 76).

III. On se place ici dans l'espace affine euclidien de dim 3 sur $\mathbb{R}$ muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1°. Soit m le point du plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de coordonnées :
 $x = \frac{a}{2} \left(u + \frac{1}{u}\right)$; $y = \frac{a}{2} \left(u - \frac{1}{u}\right)$ où $a > 0$ et $u \in \mathbb{R}^*$.

Tracer (H) , lieu du point m .

2°. La courbe (H) est en fait la projection orthogonale de (C) sur le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$ où (C) est tracée sur la surface d'équation : $z = \frac{a}{2} \left(u + \frac{1}{u}\right)$.

Déterminer les équations paramétriques de (C) , puis tracer (Γ) projection orthogonale de (C) sur $(O, \vec{i}, \vec{k})$.

3°. M étant un point quelconque de (C) , on désigne par P et Q les projections respectives de M sur Ox et Oy . Montrer que la tangente en M à (C) coupe la droite PQ en un point T dont on déterminera les coordonnées en fonction de a et du paramètre u du point M .