

EXERCICE 1 : étude d'une suite

5/10/83

On considère l'ensemble des suites de réels vérifiant la relation de récurrence: $\forall n \in \mathbb{N}: u_{n+2} = u_{n+1} + (k^2 - 1/4)u_n$. (1)

1°) Montrer que, si on a: $u_n = \lambda \left(\frac{1}{2} - k\right)^n + \mu \left(\frac{1}{2} + k\right)^n$
 et $u_{n+1} = \lambda \left(\frac{1}{2} - k\right)^{n+1} + \mu \left(\frac{1}{2} + k\right)^{n+1}$

où λ et μ sont indépendants de n alors: $u_{n+2} = \lambda \left(\frac{1}{2} - k\right)^{n+2} + \mu \left(\frac{1}{2} + k\right)^{n+2}$

2°) En déduire que si une suite de réels vérifie la relation (1) alors: $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2: \forall n \in \mathbb{N}: u_n = \lambda \left(\frac{1}{2} - k\right)^n + \mu \left(\frac{1}{2} + k\right)^n$. ($k \neq 0$)

3°) Calculer λ et μ si $u_0 = 2k$ et $u_1 = 1 + k$ (traiter à part le cas où $k = 0$). En déduire l'expression de u_n en fonction de n .

EXERCICE 2 : groupe simple

On dit qu'un groupe G est simple s'il n'a pas d'autres sous-groupes distingués que $\{e\}$ et G . On se propose de démontrer que le groupe alterné A_5 (ensemble des permutations paires de S_5) est simple.

1°). Combien le groupe A_5 comprend-il de cycles de longueur 3?, de "doubles transpositions" $(i, j)(k, l)$ (ou $\{i, j\} \cap \{k, l\} = \emptyset$), de cycles d'ordre 5?

2°). Calculer les produits: $(1, 2, 3, 4, 5)^{-1}(3, 4, 5)(1, 2, 3, 4, 5)(3, 4, 5)^{-1} = c_1$
 $(1, 2)(3, 4)(3, 4, 5)(1, 2)(3, 4)(3, 4, 5)^{-1} = c_2$

3°). A l'aide des 2 questions ci-dessus, montrer que tout sous-groupe distingué de A_5 , non réduit à $\{e\}$, contient un cycle de longueur 3.

4°). Calculer le produit $(1, 2)(3, k)(2, 1, 3)(1, 2)(3, k)$ pour $k \in \{4, 5\}$.

En déduire que A_5 est un groupe simple.

EXERCICE 3 : combinaison de chiffres

On considère les six chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6

1°. Chercher le cardinal de l'ensemble des nombres de 6 chiffres