

I. Suites

On suppose que $a \in \mathbb{Q}_+^*$; on définit la suite (u_n) par :

$$u_0 \neq 0 \text{ et la relation de récurrence : } u_n = \frac{1}{2} u_{n-1} + \frac{a}{2u_{n-1}}.$$

1°). Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \cdot u_0 > 0$ et que : si $u_0 \in \mathbb{Q}$ alors $u_n \in \mathbb{Q}$.

2°). a) Montrer les deux relations :

$$i) u_n - \sqrt{a} = (u_{n-1} - \sqrt{a})^2 / (2u_{n-1}) \quad ii) u_n + \sqrt{a} = (u_{n-1} + \sqrt{a})^2 / (2u_{n-1}).$$

b) Montrer que, si $u_0 \neq -\sqrt{a}$, alors $u_n + \sqrt{a} \neq 0$; donner

alors l'expression de $v_n = \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}$ en fonction de $k = \frac{u_0 - \sqrt{a}}{u_0 + \sqrt{a}}$ et n .

En déduire celle de u_n .

3°) a) Montrer que la suite (u_n) est convergente ; préciser sa limite en fonction de u_0 .

b) Si $u_0 > 0$, montrer que $(u_n, a/u_n)$ réalise un encadrement de $\sqrt{a}$.

4°) On prend $u_0 = E(\sqrt{a})$ et on pose $r = \sqrt{a} - E(\sqrt{a})$. Montrer que :

$\forall n \geq 1 : u_n > u_0$ et $u_n > \sqrt{a}$. En utilisant le 2°.a. i majorer alors $u_n - \sqrt{a}$ par un nombre de la forme : $r^{\alpha_n} / (2u_0)^{\beta_n}$; exprimer les valeurs de α_n et β_n en fonction de n (On trouve $\alpha_n = 2\alpha_{n-1}$ et $\beta_n = 2(\beta_{n-1} + 1)$).

Application : $a = 5$, $u_0 = 2$ ($r < 1/4$) : donner l'expression de la majoration de $u_n - \sqrt{5}$. Déterminer n tel que u_n soit une valeur approchée de $\sqrt{5}$ à 10^{-19} près par excès ; donner l'expression de u_n sous forme d'une somme de 2 fractions.

II. Polynômes : dans ce problème, on identifie un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ et la fonction polynôme qui lui est associée : justifier ceci.

A) Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de polynômes définie par :

$$P_0 = 2 \quad ; \quad P_1 = X + 1/2 \quad \text{et la relation de récurrence :}$$

$$16 P_n - 8(2X+1) P_{n-1} + P_{n-2} = 0 \quad (n \geq 2). \quad (1)$$