

I. Sous groupes de $\mathbb{Z}^2$ et de $\mathbb{Z}^3$

L'ensemble $(\mathbb{Z}, +)$ étant un groupe additif, on considère $(\mathbb{Z}^2, +)$ muni de la structure de groupe produit définie par :

$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$. On désigne par p_1 et p_2 les projections canoniques : $p_1 : (a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mapsto a \in \mathbb{Z}$ et $p_2 : (a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mapsto b \in \mathbb{Z}$.

1°. Soit G un sous-groupe de $\mathbb{Z}^2$; montrer que dans l'ensemble $p_2(G)$, il existe un entier $b_0 \geq 0$ et un seul, tel que tout élément de $p_2(G)$ s'écrive : rb_0 , $r \in \mathbb{Z}$.

2°. b_0 étant défini ci-dessus, on considère un élément $(a_0, b_0) \in G$. Montrer que tout élément (m, n) de G s'écrit de manière unique sous la forme : $(m, n) = r(a_0, b_0) + (s, 0)$ avec : $(r, s) \in \mathbb{Z}^2$.

Prouver que l'application $(m, n) \mapsto s$ est un morphisme de G dans $\mathbb{Z}$.

3°. En déduire que tout sous-groupe G de $\mathbb{Z}^2$ est de l'une des 3 formes suivantes :
 i) $G = \{(0, 0)\}$ ii) $G = \mathbb{Z}g_0$, $g_0 \neq (0, 0)$
 iii) $G = \mathbb{Z}g_0 + \mathbb{Z}g_1$ où g_0 et g_1 sont linéairement indépendants.

4°. Étendre la méthode précédente, et préciser les différents cas, aux sous-groupes de $\mathbb{Z}^3$.

II. Groupe ordonné :

Étant donné un groupe abélien G noté additivement, on dit qu'une relation d'ordre est compatible avec l'addition dans G si :

$$\forall x \in G : a < b \Rightarrow a + x < b + x.$$

On dit alors que G est un groupe ordonné.

1° Soit $P = \{x \in G, x > 0\}$, montrer que toute relation d'ordre (notée $<$) compatible avec l'addition dans G est de la forme $b - a \in P$ ($\Leftrightarrow a < b$!).

Montrer que $P + P \subset P$ et $P \cap (-P) = \{0\}$

①