

HX5 Mercredi 6/10/82

DEVOIR SURVEILLE n°1

EXERCICE : conjugaison dans les groupes

Soit G un groupe, on dit que a et b sont conjugués si :

$\exists x \in G : b = x^{-1} a x$. On définit alors : $a R b \Leftrightarrow a$ et b conjugués.

1°). Montrer que R est une relation d'équivalence. Exemple : montrer que dans S_3 , les cycles $(1, 2, 3)$ et $(1, 3, 2)$ sont conjugués (prendre pour x une transposition).

2°) On note C_a la classe d'équivalence de a . Trouver alors :

i). C_e ii) C_a si G est commutatif.

3°). Montrer que si H est un sous-groupe de G , $x^{-1} H x$ est un sous-groupe de G . Montrer aussi que $N_H = \{x \in G, x^{-1} H x = H\}$ est un sous-groupe de G et que H est distingué dans N_H .

PROBLEME : résidus quadratiques

I - On se place dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ où p est un nombre premier > 2 .

1°) Démontrer que : $f : a \mapsto a^p$ est un endomorphisme de groupe dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +)$. Puis que : $(n \cdot 1)^p = n \cdot 1$ si $n \in \mathbb{Z}$ et $1 \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

En déduire le théorème de Fermat : $\forall x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} : x^p = x$.

2°). On s'intéresse par la suite à l'équation : $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ (1).

Montrer qu'en posant $X = x + b/2a$, on peut ramener (1) à : $X^2 = \alpha$.

3°) Si $a \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$, montrer que $a^{\frac{p-1}{2}} = \pm 1$ et que l'application :

$f : a \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* \mapsto a^{\frac{p-1}{2}} \in \{-1, +1\}$ est un homomorphisme de groupe (pour $\times$).

4°). Montrer que : $\text{card} \{x^2, x \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*\} = \frac{p-1}{2}$; en déduire le critère d'Euler : a carré dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* \Leftrightarrow a^{\frac{p-1}{2}} = 1$.

5°). Applications :

a) Chercher la condition sur p pour que $x^2 + 1 = 0$ ait une solution dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Donner les valeurs de p convenant pour $p \leq 50$.

b) L'équation $x^2 - 6x + 17 = 0$ est-elle possible dans $\mathbb{Z}/41\mathbb{Z}$? (bien justifier l'affirmation). Si oui, la résoudre.