

que l'on peut former sans employer deux fois le même chiffre.

2°) On les écrit dans l'ordre croissant, quel est le 200^{ième}?

3°) Calculer la somme de tous ces éléments.

4°) Montrer qu'aucun n'est premier, ni n'est carré parfait.

EXERCICE 4 : idéal premier, idéal maximal.

Soit A un anneau commutatif.

1°) On dit qu'un idéal $\mathfrak{J}$ de A est premier si :

$$\forall (x, y) \in A^2, \quad xy \in \mathfrak{J} \Rightarrow x \in \mathfrak{J} \text{ ou } y \in \mathfrak{J}$$

Montrer l'équivalence suivante : $A/\mathfrak{J}$ intègre $\Leftrightarrow \mathfrak{J}$ premier

Quels sont les idéaux premiers de $\mathbb{Z}$?

2°) On dit qu'un idéal $\mathfrak{J}$ de A est maximal si :

si $\mathfrak{I}$ est un idéal contenant $\mathfrak{J}$ alors soit $\mathfrak{I} = \mathfrak{J}$ soit $\mathfrak{I} = A$.

Montrer alors l'équivalence : $A/\mathfrak{J}$ corps $\Leftrightarrow \mathfrak{J}$ maximal

Quels sont les idéaux maximaux de $\mathbb{Z}$?

3°) On définit $\mathbb{Z}(j) : \{a + bj, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$

a) Montrer que $\mathbb{Z}(j)$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.

b) Si on note (2) l'idéal engendré par 2 dans $\mathbb{Z}(j)$, déterminer

la structure de l'anneau quotient $\mathbb{Z}(j)/(2)$. Conclusion?