

1°). a) Expliciter P_2, P_3, P_4 .

b) Déterminer le degré de P_n ainsi que le coefficient du terme de plus haut degré de ce polynôme.

c) Établir une relation entre $P_n(x)$ et $P_n(-x-1)$, puis entre $P'_n(x)$ et $P'_n(-x-1)$; montrer que, si α est racine de P_n , il en est de même de $-1-\alpha$.

d) Montrer qu'il existe une racine, que l'on déterminera, commune à tous les polynômes P_{2n+1} d'une part, P'_{2n} de l'autre.

2°) On suppose dans cette question: $-1 \leq x \leq 0$; soit $\theta \in [0, \pi/2]$

et $x = -\cos^2 \theta$. On pose: $f_n(\theta) = P_n(-\cos^2 \theta)$ $g_n(\theta) = P'_n(-\cos^2 \theta)$

a) Exprimer $f_1(\theta)$ en fonction de $\cos 2\theta$ et $f_2(\theta)$ en fonction de $\cos 4\theta$.

b) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer qu'il existe un réel λ_n , que l'on déterminera, tel que l'on ait, pour tout entier n :

$$f_n(\theta) = \lambda_n \cos 2n\theta.$$

c) Déterminer l'ensemble des racines du polynôme P_n , $n \geq 1$.

d) On suppose $\theta \in]0, \pi/2[$. Exprimer, pour $n \geq 1$, $g_n(\theta)$ en fonction de $\frac{\sin 2n\theta}{\sin 2\theta}$; en déduire l'ensemble des racines du polynôme P'_n .

e) Calculer: $P_n(0), P_n(-1), P'_n(0), P'_n(-1), P_{2n}(-\frac{1}{2})$ pour $n \geq 1$.

f) En utilisant la relation (1), montrer que:

$$P_n(x) = \frac{1}{4^n} \left[(1+2x+2i\sqrt{-x-x^2})^n + (1+2x-2i\sqrt{-x-x^2})^n \right]$$

(d'après ENSI H).