

(On rappelle que $P+P = \{x+y, x \in P, y \in P\}$ et $-P = \{-x, x \in P\}$)

2°. Réciproquement, montrer que si P est une partie de G vérifiant les 2 relations (1), la relation $b-a \in P$ est une relation d'ordre compatible avec l'addition dans G .

Montrer que l'ordre est total si et seulement si $G = P \cup (-P)$.

3°. On définit sur $\mathbb{R}^2$ l'ordre lexicographique :

$$(x, y) \prec_1 (x', y') \Leftrightarrow x < x' \text{ ou } x = x', y \leq y'.$$

et une deuxième relation d'ordre définie par :

$$(x, y) \prec_2 (x', y') \Leftrightarrow x \leq x' \text{ et } y \leq y'.$$

Ces ordres sont-ils compatibles avec la structure de groupe de $\mathbb{R}^2$, sont-ils partiels ou totaux ? Représenter P dans chacun des cas.

4°. En notation multiplicative, G étant toujours abélien, montrer que les conditions (1) sont équivalentes à : $P \cdot P \subset P$ et $P \cap P' = \{1\}$.
Montrer que l'on peut prendre $P = \mathbb{N}^*$ si $G = \mathbb{Q}_+^*$, préciser la relation d'ordre obtenue, cet ordre est-il total ?

III. A et B sont 2 ensembles de cardinaux respectifs n, p ($n, p > 0$).

On note S_n^p le nombre des applications surjectives de A vers B .

1° Calculer S_n^1, S_n^n, S_n^p pour $p > n$.

2°. Soit $p \leq n$, on choisit $a \in A$; les surjections sont de 2 sortes : celles pour lesquelles la restriction à $A - \{a\}$ est une surjection, et celles pour lesquelles cette restriction n'est pas une surjection.

En déduire : $S_n^p = p(S_{n-1}^{p-1} + S_{n-1}^p)$ (raisonnement à expliciter).

3°. Montrer, par récurrence sur n , que : $S_n^p = \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} C_p^k p^k$
(montrer et utiliser la formule : $p C_{p-1}^{k-1} = k C_p^k$).

4° Contrôler la formule dans les cas suivants : i) $n=p=5$

ii) $n=4, p=5$ iii) $n=5, p=3$.