

Exercice 1: [14]

1°) Comme $k^2 - \frac{1}{4} = (k - \frac{1}{2})(k + \frac{1}{2}) \Rightarrow u_{n+1} = \lambda(\frac{1}{2} - k)^{n+1}(1 - k - \frac{1}{2}) + \mu(\frac{1}{2} + k)^{n+1}(1 + k - \frac{1}{2})$ c.q.f.d. (3)

2°) On pose à priori: $u_0 = \lambda + \mu$ et $u_1 = \lambda(\frac{1}{2} - k) + \mu(\frac{1}{2} + k) \Rightarrow$ on trouve les valeurs de λ et μ si $k \neq 0$ et par récurrence on a bien: $u_n = \lambda(\frac{1}{2} - k)^n + \mu(\frac{1}{2} + k)^n$. (5)

3°) On résout: $\lambda + \mu = 2k \Rightarrow \lambda = \frac{2k^2 - 1}{2k}, \mu = \frac{2k^2 + 1}{2k}$.

$\lambda(\frac{1}{2} - k) + \mu(\frac{1}{2} + k) = 1 + k$

d'où

$u_n = \frac{2k^2 - 1}{2k}(\frac{1}{2} - k)^n + \frac{2k^2 + 1}{2k}(\frac{1}{2} + k)^n$ (3)

Si $k = 0$ on trouve: $u_1 = \frac{1}{1}, u_2 = \frac{2}{2}, u_3 = \frac{3}{4}, u_4 = \frac{4}{8}$

et par récurrence, on montre que $u_n = \frac{n}{2^{n-1}}$ (3)

Exercice 2: [29]

1°) 3-cycles: $\frac{5 \times 4 \times 3}{3} = 20$ doubles transpositions: $\frac{1}{2} \times \frac{5 \times 4}{2} \times \frac{3 \times 2}{2} = 15$ (3)

5-cycles: $\frac{5 \times 4 \times 3 \times 2}{5} = 24$ (2)

en effet $(1, 2)(3, 4) = (3, 4)(1, 2)$

Soit au total: 59.

donc on les retrouve 2 fois.

2°) $c_1 = (2, 3, 5)$ $c_2 = (3, 4, 5)$ (4)

3°) Card $\mathcal{A}_5 = 60 \Rightarrow \mathcal{A}_5 = \{3\text{-cycles}\} \cup \{\text{doubles transpositions}\} \cup \{5\text{-cycles}\} \cup \{e\}$ *

donc, si $H \triangleleft \mathcal{A}_5$ et si $H \neq \{e\}$.

$\Rightarrow$ 3 possibilités: i). H contient un 3-cycle: OK.

ii). H contient une double transposition: par exemple: $(1, 2)(3, 4)$

donc: $(3, 4, 5)(1, 2)(3, 4)(3, 4, 5)^{-1} \in H$ (car H est distingué) $\Rightarrow c_2 \in H$.

iii) H contient un 5-cycle: grâce au 2° (en prenant le cycle $(1, 2, 3, 4, 5)$)

on déduit que: $c_2 \in H$ c.q.f.d. (8)

4°) Pour $k = 4$, on trouve $(1, 2, 4)$ et $k = 5$: $(1, 2, 5)$. (2)

Si $H \triangleleft \mathcal{A}_5$ et si $H \neq \{e\}$ alors H contient un cycle d'ordre 3: par exemple: $(2, 1, 3)$

donc, il contient aussi les cycles $(1, 2, 4)$ et $(1, 2, 5)$; avec le même genre de calculs, on

montre aussi qu'il contient $(2, 1, 4)$ et $(2, 1, 5)$ donc, H contient les cycles:

$(1, 3, 2), (1, 2, 4), (1, 2, 5), (1, 4, 2), (1, 5, 2)$, on montrerait alors qu'il contient tous les 3-cycles (par raison de symétrie).

Ensuite, on a: $(1, 2)(3, 4) = (1, 2, 3)(2, 3, 4)$, on montrerait alors qu'il contient toutes les doubles transpositions.

Enfin: $(1, 2, 3, 4, 5) = (1, 2, 3)(1, 4, 5) \Rightarrow H$ contient les 5-cycles.

En conclusion: $H = \mathcal{A}_5$. (8)

* Les doubles transpositions et les 5-cycles sont des permutations paires.

Exercice 3: [18]

1°) $6! = 720$. (3)

2°) Si on les écrit dans l'ordre croissant: le 1^{er} est: 1 2 3 4 5 6, le 2^e: 1 2 3 4 6 5.

le 3^e: 1 2 3 6 5 4, le 4^e: 1 2 6 5 4 3, le 5^e: 1 6 5 4 3 2, le 6^e: 2 1 3 4 6 5