

I.

1°) Récurrences immédiates

← (3)

2°) a) i : immédiats ← (2)

b) $u_0 + \sqrt{a} \neq 0 \Rightarrow$ grâce à ii) $u_1 + \sqrt{a} \neq 0$ et par récurrence: $u_n + \sqrt{a} \neq 0$.

$u_n = u_{n-1}^2$ (en utilisant i et ii) $\Rightarrow u_n = u_0^{2^n} = R^{2^n}$ (attention aux puissances).

Expression de u_n :
$$u_n = \sqrt{a} \cdot \frac{1 + R^{2^n}}{1 - R^{2^n}}$$
 ← (6)

3°) a) il faut et il suffit d'étudier la position de $|R|$ par rapport à 1.

$-1 < \frac{u_0 - \sqrt{a}}{u_0 + \sqrt{a}} < 1 \Leftrightarrow u_0 > 0$ (il faut résoudre l'inéquation).

Donc: $|R| < 1 \Leftrightarrow u_0 > 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \sqrt{a}$ ← (6)

$|R| > 1 \Leftrightarrow u_0 < 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -\sqrt{a}$.

(On remarque que l'équation $|R| = 1$ est impossible).

b) si $u_0 > 0$ alors, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$, donc, si $u_n < \sqrt{a}$ alors $\frac{a}{u_n} > \sqrt{a}$ de même, si $u_n > \sqrt{a}$ alors $\frac{a}{u_n} < \sqrt{a}$ don. En conclusion, $(u_n, \frac{a}{u_n})$ réalise un encadrement de $\sqrt{a}$. ← (2)

4°). Comme $u_0 > 0$, en utilisant le 2° a) i) on en déduit que $u_n > \sqrt{a} > u_0$.

Majoration de $u_n - \sqrt{a}$:

Par récurrence: $u_1 - \sqrt{a} = (u_0 - \sqrt{a})^2 / 2u_0 = \pi^2 / 2u_0 \Rightarrow d_1 = 2, \beta_1 = 1$.

si $u_n - \sqrt{a} < \pi^{d_n} / (2u_0)^{\beta_n}$ alors:

$$u_{n+1} - \sqrt{a} = (u_n - \sqrt{a})^2 / (2u_n) < \pi^{2d_n} / (2u_0)^{2\beta_n} / (2u_n) < \pi^{2d_n} / (2u_0)^{2\beta_{n+1}}$$

donc: $d_n = 2d_{n-1}$ et $\beta_n = 2\beta_{n-1} + 1$

d'où:

$$u_n - \sqrt{a} < \pi^{2^n} / (2u_0)^{2^n - 1}$$
 ← (6)

Application: on veut que $u_n - \sqrt{5} < 10^{-19}$, il suffit donc que: $\pi^{2^n} / (2u_0)^{2^n - 1} < 10^{-19}$
i.e. $\frac{1}{4^{2^n - 1}} < 10^{-19}$ et en prenant les log en base 10 $\Leftrightarrow 2(2^n - 1) \log 2 > 19$.
d'où le résultat: $n = 4$.

Calcul de u_4 : $u_1 = \frac{9}{4}, u_2 = \frac{161}{72}, u_3 = \frac{51841}{23184}, u_4 = \frac{51841}{46368} + \frac{57960}{51841}$ ← (9)

$u_4 = \frac{5374978561}{2403763488} \approx 2,236.067.977.499.789.696.448$.

II. Justification: dans $\mathbb{R}[X]$, on a équivalence entre

identité formelle et identité fonctionnelle.

← (2)

1°) a)

$$P_2 = X^2 + X + 1/8$$

$$P_3 = X^3 + \frac{3}{2}X^2 + \frac{9}{16}X + \frac{1}{32}$$

$$P_4 = X^4 + 2X^3 + \frac{5}{4}X^2 + \frac{X}{4} + \frac{1}{128}$$

← (5)

b) Par une récurrence immédiate, on trouve: $\deg P_n = n$ et P_n unitaire ← (3)

c) $P_0(-X-1) = P_0(X), P_1(-X-1) = -P_1(X), P_2(-X-1) = P_2(X)$

Montrons par récurrence que: $P_n(-X-1) = (-1)^n P_n(X)$. ← (2)