

Corrigé du devoir surveillé.

I. 1°)  $p_2$  est un morphisme de groupe, donc,  $p_2(G)$  est un sous-groupe de  $\mathbb{Z}$  : i.e.  $p_2(G) = b_0 \mathbb{Z}$  avec  $b_0 \geq 0$ .  $\leftarrow (3)$

2°)  $p_2(m, n) = n$  donc,  $\exists r \in \mathbb{Z}$  t.q.  $p_2(m, n) = r b_0 = n$ .

d'où  $(m, n) = r(a_0, b_0) = (s, 0)$  où  $s \in \mathbb{Z}$ .

Unicité: si  $b_0 > 0$ ,  $r$  est unique et par construction,  $s$  est unique.  $\leftarrow (3)$

$(m, n) \mapsto s$  morphisme? : si  $(m, n) = r(a_0, b_0) + (s, 0)$  et  $(m', n') = r'(a_0, b_0) + (s', 0)$

alors:  $(m, n) + (m', n') = (r+r')(a_0, b_0) + (s+s', 0) \Rightarrow (m, n) \mapsto s$  morphisme

(à condition que  $b_0 > 0$  sinon  $s$  n'est pas déterminé).  $\leftarrow (3)$

3°) A priori 2 cas:

$b_0 > 0$  alors  $\exists a_1 \neq 0 : (s, 0) = t(a_1, 0)$  (car  $\{s\}$  décrit un s.g. de  $\mathbb{Z}$ ).

si  $a_1 \neq 0$  : alors:  $(m, n) = r.g_0 + t.g_1$  où  $g_0 = (a_0, b_0)$  et  $g_1 = (a_1, 0)$

$g_1$  et  $g_0$  sont linéairement indépendants, car  $b_0 a_1 \neq 0$ .

si  $a_1 = 0$  alors:  $(m, n) = r.g_0$  .  $g_0 \neq (0, 0)$

$b_0 = 0$  on considère l'application  $p_1 \Rightarrow \exists a_1 \geq 0 : (m, n) = t(a_1, 0)$ .

si  $a_1 \neq 0$  alors  $(m, n) = t.g_1$   $g_1 \neq (0, 0)$

si  $a_1 = 0$  alors  $G = \{(0, 0)\}$  c.q.f.d.  $\leftarrow (7)$

4°) Par le même algorithme, on trouvera les 4 cas suivants:

(i)  $G = \{(0, 0)\}$ ; (ii)  $G = \mathbb{Z}.g_0$   $g_0 \neq (0, 0, 0)$  (iii)  $G = \mathbb{Z}g_0 + \mathbb{Z}g_1$ ,  $g_0, g_1$  linéairement indépendants. (iv)  $G = \mathbb{Z}g_0 + \mathbb{Z}g_1 + \mathbb{Z}g_2$   $g_0, g_1, g_2$  linéairement indépendants  $\leftarrow (8)$

II. 1°)  $a < b \Leftrightarrow a - a < b - a \Leftrightarrow 0 < b - a \Leftrightarrow b - a \in P$  (!)  $\leftarrow (1)$

$P + P \subset P \Leftrightarrow \forall (a, b) \in P^2, a + b \in P$  or:  $a > 0 \Leftrightarrow a + b > b \Rightarrow a + b > 0$   $\leftarrow (2)$

$P \cap (-P) = \{0\} \Leftrightarrow \forall a \in P \cap (-P), a = 0$ .  $\leftarrow (3)$

or:  $a \in P \Rightarrow a > 0$  et  $-a \in P \Leftrightarrow -a > 0 \Leftrightarrow a < 0$  donc  $a = 0$ .

2°) Réflexivité:  $a - a = 0 \in P \Rightarrow a < a$ .

Anti-Symétrie:  $a - b \in P$  et  $b - a \in P \Rightarrow a - b = 0 \Rightarrow a = b$ .  $\leftarrow (4)$

Transitivité:  $a - b \in P$  et  $b - c \in P \Rightarrow (a - b) + (b - c) = a - c \in P$ .  $\leftarrow (5)$

Compatibilité:  $a < b \Leftrightarrow b - a \in P \Leftrightarrow \forall c \in G, (b + c) - (a + c) \in P \Leftrightarrow a + c < b + c$ .

ordre total:  $\Leftrightarrow \forall a \in G$ , on peut comparer  $a$  et  $0$  d'où:  $a > 0 \Rightarrow a \in P$  et  $a < 0 \Rightarrow a \in -P$  c.q.f.d.

$\Leftrightarrow \forall (a, b) \in G^2$ , on veut comparer  $a$  et  $b$ : or:

$b - a \in P \cup (-P) \Leftrightarrow b - a \in P$  ou  $a - b \in P \Leftrightarrow a < b$  ou  $b < a$  c.q.f.d.  $\leftarrow (2)$

3°) l'"ordre" lexicographique est bien un ordre! Pour cette relation d'ordre,  $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, (x > 0) \text{ ou } (x = 0, y \geq 0)\}$ .

On vérifie bien que  $P + P \subset P$  et que  $P \cap (-P) = \{0\}$ .  $\leftarrow (1)$

Alors on  $\mathbb{R}^2 = P \cup (-P)$ ? Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , si  $x > 0$ , alors  $(x, y) \in P$