

$0. 144^\circ: 216543$, $0. 168^\circ: 236541$, $0. 192^\circ: 246531$
 $0. 193^\circ: 251356$, $0. 198^\circ: 251653$, $0. 199^\circ: 253146$ et enfin
 $0. 200^\circ: 253164$ (7)

3°. Au nombre 123456 on peut faire correspondre le nombre 654321 et leur somme vaut 777.777. On pourra ainsi les grouper 2 par 2 (aucun n'étant égal à son "symétrique") d'où la somme:

$$S = 777.777 \times 360 = 279.999.720 \quad (5)$$

4°. $1+2+3+4+5+6 = 21$ donc tous ces nombres sont divisibles par 3 et pas par 9 donc, aucun n'est premier, ni n'est carré parfait. (3)

Exercice 4: 19

1°) $\Leftarrow$. $\mathcal{I}$ est premier: si $x \cdot y = 0$ alors $x, y \in \mathcal{I} \Rightarrow x \in \mathcal{I}$ ou $y \in \mathcal{I} \Rightarrow x = 0$ ou $y = 0$
 donc $A/\mathcal{I}$ est intègre.

$\Rightarrow$. $A/\mathcal{I}$ intègre: i.e. $x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $y = 0$ $\Leftarrow$ (4)

$\Leftrightarrow: x, y \in \mathcal{I} \Rightarrow x \in \mathcal{I}$ ou $y \in \mathcal{I}$: $\mathcal{I}$ est premier.

Les idéaux premiers de $\mathbb{Z}$ sont de la forme $p\mathbb{Z}$ où p est un nombre premier (1)

2°) $\Leftarrow$. soit $x \in A \setminus \mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ l'idéal engendré par x et $\mathcal{I}$: $\mathcal{J} = (x) + \mathcal{I}$
 comme $\mathcal{I}$ est maximal $\Rightarrow \mathcal{J} = A$ i.e. $1 \in \mathcal{J} \Rightarrow \exists a \in A: a \cdot x + i = 1$ ($i \in \mathcal{I}$)
 dans $A/\mathcal{I} \Rightarrow a \cdot x = 1$ donc x est inversible, $A/\mathcal{I}$ est un corps.

$\Rightarrow$. Soit $\mathcal{J}$ un idéal contenant strictement $\mathcal{I}$: si $x \in \mathcal{J} \setminus \mathcal{I}$: $x \neq 0$ donc
 x possède un inverse dans $A/\mathcal{I}$: soit a cet inverse: alors: $a \cdot x = 1$

i.e. $a \cdot x + i = 1$ or: $a \cdot x + i \in \mathcal{J}$ et comme $1 \in \mathcal{J}$ alors $\mathcal{J} = A$ c.q.f.d. $\Leftarrow$ (6)

Idéaux maximaux de $\mathbb{Z}$: on sait que $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ corps si p premier, donc, les idéaux maximaux de $\mathbb{Z}$ sont les idéaux $p\mathbb{Z}$ où p premier. $\Leftarrow$ (1)

3°. a). $\mathbb{Z}(j)$ est bien un sous-groupe de $\mathbb{C}$, il suffit de montrer qu'il est stable pour $\times$ car $1 \in \mathbb{Z}(j)$: $(a+bj)(c+dj) = ac - bd + (ad+bc-bd)j$. c.q.f.d. (2)

b). Il n'y a que 4 éléments dans $\mathbb{Z}(j)/(2)$: $0, 1, j, 1+j$.

Montrons que $\mathbb{Z}(j)/(2)$ est un corps: l'inverse de 1: c'est lui-même,
 $j(1+j) = j + j^2 = -1 = 1$ (car $1+1=2=0$) donc, j et $1+j$ sont inverses l'un de l'autre. (3)

(2) est un idéal maximal de $\mathbb{Z}(j)$. $\Leftarrow$ (2)