

Réurrence double:  $P_n(X) = (X + \frac{1}{2}) P_{n-1}(X) - \frac{1}{16} P_{n-2}(X)$

$$\Rightarrow P_n(-X-1) = -(X + \frac{1}{2}) P_{n-1}(-X-1) - \frac{1}{16} P_{n-2}(-X-1) = (-1)^n [(X + \frac{1}{2}) P_{n-1}(X) - \frac{1}{16} P_{n-2}(X)] = (-1)^n P_n(X) \text{ c.q.f.d.}$$

En dérivant, on trouve:  $P'_n(-X-1) = (-1)^{n-1} P'_n(X)$  (3)

Grâce à la relation (2) si  $P_n(\alpha) = 0$ ,  $P_n(-1-\alpha) = (-1)^n P_n(\alpha) = 0$ . (6)

d) On substitue  $-\frac{1}{2}$  à  $X$  dans (2)  $\Rightarrow P_n(-\frac{1}{2}) = (-1)^n P_n(-\frac{1}{2})$

$\Rightarrow P_{2n+1}(-\frac{1}{2}) = 0$  et on trouve de même, en utilisant la relation (3) que:  $P'_{2n}(-\frac{1}{2}) = 0$ . (3)

2°) a)  $f_1(\theta) = -\frac{\cos 2\theta}{2}$   $f_2(\theta) = \frac{\cos 4\theta}{8}$  (3)

b) Montrons par récurrence que

$$f_n(\theta) = (-\cos^2 \theta + \frac{1}{2}) 2 \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} \cos(2n-2)\theta - \frac{1}{16} \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-2} \cos(2n-4)\theta$$

et on trouve bien la relation (4). (4)

c) racines de  $P_n$ :  $f_n(\theta) = 0 \Leftrightarrow 2n\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \theta = \frac{(2k+1)\pi}{4n}$

donc, les nombres  $x_k = -\cos^2 \frac{(2k+1)\pi}{4n}$  sont racines de  $P_n$ .

Si on prend:  $k \in [0, n-1]$ , tous les  $x_k$  sont distincts. On a donc trouvé  $n$  racines à un polynôme de degré  $n$ , on les a toutes. (5)

d)  $f'_n(\theta) = -2 \left(-\frac{1}{4}\right)^n 2n \sin(2n\theta) = P'_n(-\cos^2 \theta) \cdot 2 \sin \theta \cos \theta$  (dérivée des fct.

d'où:  $P'_n(-\cos^2 \theta) = g_n(\theta) = n \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} \frac{\sin(2n\theta)}{\sin(2\theta)}$  composées

racines de  $P'_n$ : on procède comme au c) mais ici, il ne faut pas que

$\sin 2\theta = 0$  d'où les racines de  $P'_n$ :  $y_k = -\cos^2 \frac{k\pi}{2n}$ ,  $k \in [1, n-1]$  (5)

e)  $P_n(0) = f_n(\frac{\pi}{2}) = \frac{2}{4^n}$ ;  $P_n(-1) = f_n(0) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^n$

On a:  $P'_n(-1) = \lim_{\theta \rightarrow 0} n \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} \frac{\sin 2n\theta}{\sin 2\theta} = n^2 \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$  et  $P'_n(0) = \frac{n^2}{4^{n-1}}$  grâce à (3).  
 $P_{2n}(-\frac{1}{2}) = f_{2n}(\frac{\pi}{4}) = \frac{2(-1)^n}{4^{2n}}$  (3)

f).  $P_n(x) = (x + \frac{1}{2}) P_{n-1}(x) - \frac{1}{16} P_{n-2}(x)$ : ceci est une suite récurrente double:

résolvante:  $x^2 - (x + \frac{1}{2})x + \frac{1}{16} = 0$

$\Delta = x^2 + x < 0$  ( $-1 < x < 0$ )  $\Rightarrow x = \frac{2n+1 \pm i\sqrt{-x^2-x}}{4}$

d'où la formule (valable aussi si  $x=0$  ou  $x=-1$  par continuité). (5)

(On retrouve alors:  $P_n(0) = \frac{2}{4^n}$ ,  $P_n(-1) = 2 \left(-\frac{1}{4}\right)^n$ ,  $P_n(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{4^n} (i^n + (-i)^n)$ .)