

si $x=0$ et $y \geq 0$ alors $(x,y) \in P$.
 si $y \leq 0$ alors $(x,y) \in -P$.

si $x < 0$ alors $(x,y) \in -P$ donc, l'ordre est total. (1)

relation d'ordre: $P = \{(x,y), x \geq 0, y \geq 0\}$. (1)

En aussi, on a bien $P+P \subset P$ et $P \cap (-P) = \{0\}$, cette relation d'ordre est compatible mais $(1,-1) \notin P \cup (-P)$ donc l'ordre n'est pas total. (2)

4°. En notation multiplicative, $+ \rightarrow \cdot$ et $-P \rightarrow P^{-1}$ ainsi que $0 \rightarrow 1$, on retrouve bien les mêmes conditions. (compréhension: (3)).

$G = \mathbb{Q}_+^*$ et $P = \mathbb{N}^*$: on a bien $P \cdot P \subset P$ et $P \cap P^{-1} = \{1\}$. (2)

$a = \frac{x}{b} < b = \frac{t}{a} \Leftrightarrow b \cdot a^{-1} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \frac{t}{a} = n \frac{x}{a} \Leftrightarrow t = n \cdot x$. (2)

A. t. on un ordre total? non car ni $\frac{2}{3}$, ni $\frac{3}{2}$ ne sont entiers. (2)

II. 1°. $S_n^1 = 1$ (il n'y a qu'une seule application d'un ensemble à n éléments dans 1 ensemble à 1 élément ($n \neq 0$)). $S_n^n = n!$ (toutes les surjections sont bijectives).
 $S_n^0 = 0$ (il ne peut y avoir de surjection).

2°. Soit $\mathcal{S}(A,B)$ l'ensemble des surjections de A sur B, $A' = A - \{a\}$.
 On pose: $\mathcal{S}_1 = \{f \in \mathcal{S}(A,B), f|_{A'}, \text{ surjection}\}$
 $\mathcal{S}_2 = \{f \in \mathcal{S}(A,B), f|_{A'}, \text{ n'est pas une surjection}\}$.

On sait que: $\text{card } \mathcal{S}(A,B) = S_n^p = \text{card } \mathcal{S}_1 + \text{card } \mathcal{S}_2$.

si $f|_{A'}$ est une surjection, on aura p choix pour l'image de a;
 il suffit donc de choisir une surjection de A' sur B et de compléter: $\text{card } \mathcal{S}_1 = p S_{n-1}^p$.

si $f|_{A'}$ n'est pas une surjection alors, $\exists b \in B, f|_{A'}: A' \rightarrow B' = B - \{b\}$
 soit une surjection, donc, comme on a p choix pour b et S_{n-1}^{p-1} choix pour $f|_{A'}$, alors: $\text{card } \mathcal{S}_2 = p S_{n-1}^{p-1}$ c.q.f.d. (10)

3°. Récurrence sur p: il faut montrer que: $p! = \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} C_p^k k^p$.
 vrai pour $p=1$.
 à l'ordre $p+1$: $(p+1)! = \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^{p+1-k} (p+1) C_{p+1}^k k^{p+1} = \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} \dots k^p$

Récurrence sur n: $n=1, p \geq 1$: on a bien: $\sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} C_p^k k = 0$. (3)
 $= 1$.

H.R.: vrai jusqu'à l'ordre $n-1$ pour tout p.

Alors: $S_n^p = p \left(\sum_{k=0}^{p-1} (-1)^{p-1-k} C_{p-1}^k k^{n-1} + \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} C_p^k k^{n-1} \right) = p \left(\sum_{k=0}^{p-1} (-1)^{p-k} k^{n-1} (C_{p-1}^k + C_p^k) \right)$ (5)

On: $C_p^k - C_{p-1}^k = C_{p-1}^{k-1}$ et $p C_{p-1}^{k-1} = k C_p^k \Rightarrow S_n^p = \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^{p-k} C_p^k k^n + p^n$ c.q.f.d.

4°. $\sum_{k=0}^5 (-1)^{5-k} C_5^k k^5 = 5 - 320 + 2430 - 5120 + 3125 = -120 = S_5^5$ (2)

$\sum_{k=0}^5 (-1)^{5-k} C_5^k k^4 = 5 - 160 + 810 - 1280 + 625 = 0$ et $\sum_{k=0}^3 (-1)^{3-k} C_3^k k^4 = 270 = S_5^3$ (3)