

I. Les courbes C_1 et C_2 seront construites par rapport à un même repère orthonormé.

1°. Construire la courbe C_1 définie par : $x = 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$, $y = \frac{\alpha}{\sin \alpha}$, $\alpha \in]0, \pi[$ (Préciser la tangente au point d'arrêt).

2°. Mêmes questions pour C_2 : $x = -4 \sin^2 \frac{\beta}{2}$, $y = \frac{\beta}{\sin \beta}$, $\beta > 0$.

3°. Montrer que C_1 et C_2 sont courbes intégrales de l'équation différentielle (E) : $x(4-x)y' + (2-x)y = a$ (on précisera la valeur de a qui convient).

4°. Résoudre alors (E) ; donner l'ensemble des solutions définies et continues sur $\mathbb{R}$, dérivables sur $\mathbb{R}$, (C^∞ sur $\mathbb{R}$).

II. Soit (C) la courbe d'équation polaire : $r = \frac{1}{\sqrt{1-\sin 2\theta} + \sqrt{1+\sin 2\theta}}$
Chercher son équation cartésienne et la construire.

III. Tracer soigneusement la courbe d'équation polaire : $r = \frac{\cos \frac{\theta}{3} + \sin \frac{\theta}{3}}{1 - r \cos \frac{\theta}{3}}$
(On pourra éventuellement transformer cette équation).

Préciser les éventuelles asymptotes ainsi que les points multiples.

IV. Soit (E) l'équation différentielle : $xy'' - 2y' - xy = 0$

Montrer que les solutions de (E) vérifient une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 4. En déduire les solutions de (E) de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.