

EXERCICES :

1°. a) On pose $J_{m,n} = \int_0^1 t^m (1-t)^n dt$. En faisant une intégration par parties, trouver une relation entre $J_{m,n}$ et $J_{m+1,n-1}$. En déduire l'expression de $J_{m,n}$ en fonction de m et n .

b) Soit $I = \iiint_D x^p y^q z^r (x+y+z)^s dx dy dz$: $D : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$
 $x+y+z \leq 1$
 $(p,q,r,s) \in \mathbb{N}^4$.

En faisant le changement de variables : $u = x+y+z$; $u.v = x+y$; $u.v.w = x$.
 exprimer I en fonction des $J_{m,n}$; donner la valeur de I .

2°. Calculer $\iiint_B z \cos(x^2+y^2) dx dy dz$ où : $B = \left\{ \begin{array}{l} x^2+y^2+z^2 \leq R^2 \\ z \geq 0 \end{array} \right.$.

PROBLEME 1 :

On définit le mouvement d'un solide par rapport à un repère orthonormé

$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ en se donnant $(A, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ où : $\vec{I}(t) = \cos t \cdot \vec{i} + \sin t \cdot \vec{j}$,

$\vec{J}(t) = \cos(a(t)) \cdot \vec{J}_1(t) + \sin(a(t)) \cdot \vec{k}$ où $\vec{J}_1(t) = \vec{k} \wedge \vec{I}(t)$ et

$\vec{OA}(t) = b \cdot \vec{J}_1(t) + f(t) \cdot \vec{k}$. $b \in \mathbb{R}$ et les fonctions a et f sont de classe C^1 de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifient : $a(0) = \pi/2$ et $f(0) = 0$.

1°) Exprimer le vecteur $\vec{K}(t)$ en fonction de $\vec{J}_1$ et de $\vec{k}$; déterminer le vecteur rotation instantané $\vec{\Omega}(t)$ dans la base $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$.

Montrer que l'on peut choisir $a(t)$ pour que $\vec{\Omega}$ et $\vec{I} + \vec{J}$ soient orthogonaux.
 Exprimer alors les fonctions $\cos(a(t))$ et $\sin(a(t))$ à l'aide des fonctions $\tanh t$ et $\coth t$. On gardera ces valeurs par la suite.

2°) On désigne par C la trajectoire de A dans $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Déterminer f pour que l'axe instantané de rotation soit tangent à C en A . Montrer alors que cet axe reste dans un plan fixe P lié à $(A, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$.