

PROBLEME 2 :

1°) Montrer que les intégrales $S = \int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$ et $C = \int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx$ sont convergentes (Poser $x^2 = u$ et intégrer par parties).

2°) a) Soit $C_t = [0, t]^2 \subset \mathbb{R}^2$, montrer

les égalités :

$$F(t) = \iint_{C_t} \sin(x^2 + y^2) dx dy = 2 \int_0^t \sin x^2 dx \cdot \int_0^t \cos x^2 dx$$

$$G(t) = \iint_{C_t} \cos(x^2 + y^2) dx dy = \left(\int_0^t \cos x^2 dx \right)^2 - \left(\int_0^t \sin x^2 dx \right)^2.$$

b) Si $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ et si $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = L$ montrer alors que : $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \varphi(u) du = L$

c) En déduire, en fonction de S et C : $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t F(u) du$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t G(u) du$

3°) Soit $D_t = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq t, 0 \leq y \leq x\}$.

a) Montrer que $F(t) = 2 \iint_{D_t} \sin(x^2 + y^2) dx dy$.

b) En passant en polaires, exprimer $F(t)$ à l'aide d'une intégrale simple.

c) Montrer que : $\frac{1}{t} \int_0^t F(u) du$ peut s'écrire : $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{t} \int_0^{\pi/4} (\cos \theta \int_0^{t \cos \theta} \cos v^2 dv) d\theta$.

et que : $\forall \theta \in [0, \frac{\pi}{4}], \forall a \in \mathbb{R}_+, \exists t_0 > 0, t > t_0 \Rightarrow \left| \int_0^{t \cos \theta} \cos v^2 dv \right| < C + a$.

En déduire : $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t)$ (Résultat que l'on peut admettre).

d) Calculer de même $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t G(u) du$

e) Déduire de ce qui précède, les valeurs numériques de S et C .

4°) Dans le plan complexe, on considère les points O, A, B d'affixe

$0, R$ et $R + iR$ ($R > 0$)

a) Montrer que l'on a : $\left| \int_{AB} \exp(-\frac{z^2}{2}) dz \right| \leq \int_0^R \exp(-\frac{1}{2}R^2 + \frac{1}{2}Ry) dy$.

b) En déduire que : $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{AB} \exp(-\frac{z^2}{2}) dz = 0$.

c) En exprimant l'intégrale curviligne : $\int_{\gamma} \exp(-\frac{z^2}{2}) dz$ le long du chemin fermé OAB (formé de segments de droites) et en faisant

tendre R vers $+\infty$, retrouver les valeurs de S et C (on donne

$$\int_0^{+\infty} \exp(-\frac{x^2}{2}) dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}).$$

N.B. : les résultats étant souvent fournis, on pourra les admettre pour passer à la question suivante à condition de les mentionner clairement.

Il sera, d'autre part, tenu compte de la rigueur des démonstrations.