

- 2^{ème} partie

1°) Donner une condition nécessaire et suffisante, portant sur l'isobarycentre de trois points M_0 , M_1 et M_2 de (P) pour que les normales en M_0 , M_1 et M_2 à P soient concourantes.

2°) A un point M donné de (P) , d'ordonnée $\lambda \neq 0$, on associe encore le point N où la normale en M recoupe (P) ; puis, pour k réel, différent de 1 et de -1, le point Q défini par $\vec{QM} = k \vec{QN}$. Puis, de Q , on mène les deux autres normales QM_1 et QM_2 à (P) quand elles existent. On appelle λ_1 et λ_2 les ordonnées de M_1 et M_2 .

Montrer que l'on peut exprimer simplement $\lambda_1 + \lambda_2$ et $\lambda_1 \lambda_2$ en fonction de p , λ et k . En déduire l'équation de la droite $M_1 M_2$ correspondante. Si λ reste fixé et k varie, comment se déplace la droite $M_1 M_2$.

- 3^{ème} partie (Cinématique).

L'espace affine euclidien $\mathcal{E}$ de dimension 3 est muni de repères orthonormés directs.

On considère un premier repère, supposé fixe : $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Un deuxième repère $(S; \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ varie en fonction du temps t . L'origine S du repère mobile décrit la courbe d'équation : $y^2 = p(x + \frac{p}{2})$ dans le plan $z = 0$; à tout instant t l'axe $(S, \vec{I})$ est tangent en S à la courbe précédente l'angle $(\vec{i}, \vec{I}) = \theta$ étant dans l'intervalle $] -\pi, 0[$; et $\forall t$ on a $\vec{K} = \vec{k}$. θ est supposé être une fonction de classe C^1 au moins de t , t décrit $\mathbb{R}$.

1°) On considère un point M lié au repère mobile $(S; \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ on appellera (X, Y, Z) ses coordonnées dans ce repère. Donner, à l'instant t , où S a une ordonnée λ , et où l'angle $(\vec{i}, \vec{I})$ est égal à θ les formules qui permettent, en utilisant λ , θ , X , Y , Z , d'exprimer les coordonnées qu'a le point M dans le repère fixe $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

2°) Donner la définition de l'axe instantané de rotation et de translation Δ , à l'instant t , dans le mouvement du solide lié au repère $(S; \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ par rapport au repère fixe. Quelle particularité présente ici Δ à tout instant ?

Exprimer $\cotg \theta$ (puis $\sin \theta$ et $\cos \theta$) en fonction de λ et p .

En déduire la relation liant les dérivées par rapport à t des deux fonctions λ et θ de t dans le mouvement.

Enfin donner des équations, à l'instant t , de l'axe Δ , d'une part dans le repère mobile, d'autre part dans le repère fixe.

Indiquer de façon précise la surface décrite par Δ dans $\mathcal{E}$ rapporté au repère fixe.

3°) Peut-on trouver une relation entre λ (ordonnée de S) et t pour que le mouvement de S soit à accélération centrale de centre O (origine du repère fixe), les "conditions initiales" étant : à l'instant $t = 0$, le point S est en S_0 sur l'axe $(O, \vec{i})$ avec un vecteur vitesse égal à $-p \vec{j}$?
- On sera amené à intégrer une équation différentielle du deuxième ordre en λ , fonction de la variable t , dans laquelle t n'intervient pas explicitement - on indiquera une méthode d'intégration d'une telle équation et on la résoudra -

Déduire du résultat précédent le temps mis par l'origine S du repère mobile pour parcourir l'arc $\widehat{S_0 S_1}$ de la courbe qu'il décrit, le point S_1 étant le point d'ordonnée négative et d'abscisse nulle.

Exercice : dans le plan affine euclidien, on considère un mouvement à accélération centrale de centre O , $t \rightarrow H(t)$, de trajectoire (C) . $t \rightarrow m(t)$ a pour trajectoire l'autoquasipède (H) du mouvement ($\vec{Om}(t) = \vec{V}(t)$).

1°) Montrer que le rayon de courbure R de (H) en $m(t)$ vérifie : $R = -C(\lambda + s'')$ où $s = 1/r$ (C est la constante des aires)

2°) Donner les conditions pour que (H) soit un cercle.

- 2ème partie

1°) Donner une condition nécessaire et suffisante, portant sur l'isobarycentre de trois points M_0 , M_1 et M_2 de (P) pour que les normales en M_0 , M_1 et M_2 à P soient concourantes.

2°) A un point M donné de (P) , d'ordonnée $\lambda \neq 0$, on associe encore le point N où la normale en M recoupe (P) ; puis, pour k réel, différent de 1 et de -1, le point Q défini par $\vec{QM} = k \vec{QN}$. Puis, de Q , on mène les deux autres normales QM_1 et QM_2 à (P) quand elles existent. On appelle λ_1 et λ_2 les ordonnées de M_1 et M_2 .

Montrer que l'on peut exprimer simplement $\lambda_1 + \lambda_2$ et $\lambda_1 \lambda_2$ en fonction de p , λ et k . En déduire l'équation de la droite $M_1 M_2$ correspondante. Si λ reste fixé et k varie, comment se déplace la droite $M_1 M_2$.

- 3ème partie (Cinématique).

L'espace affine euclidien E de dimension 3 est muni de repères orthonormés directs.

On considère un premier repère, supposé fixe : $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Un deuxième repère $(S; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ varie en fonction du temps t . L'origine S du repère mobile décrit la courbe d'équation : $y^2 = p(x + \frac{p}{2})$ dans le plan $z = 0$; à tout instant t l'axe $(S, \vec{i})$ est tangent en S à la courbe précédente l'angle $(\vec{i}, \vec{I}) = \theta$ étant dans l'intervalle $] -\pi, 0[$; et $\forall t$ on a $\vec{K} = \vec{k}$. θ est supposé être une fonction de classe C^1 au moins de t , t décrit R .

1°) On considère un point M lié au repère mobile $(S; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on appellera (X, Y, Z) ses coordonnées dans ce repère. Donner, à l'instant t , où S a une ordonnée λ , et où l'angle $(\vec{i}, \vec{I})$ est égal à θ les formules qui permettent, en utilisant λ , θ , X , Y , Z , d'exprimer les coordonnées qu'a le point M dans le repère fixe $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

2°) Donner la définition de l'axe instantané de rotation et de translation Δ à l'instant t , dans le mouvement du solide lié au repère $(S; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ par rapport au repère fixe. Quelle particularité présente ici Δ à tout instant ?

Exprimer $\cotg \theta$ (puis $\sin \theta$ et $\cos \theta$) en fonction de λ et p .