

Corrigé du D. S.

Question préliminaire:

Equation de la droite $M_1 M_2$: $2px - (y_1 + y_2)y + y_1 y_2 = 0$

Equation de la tangente en $M(\lambda^2/2p, \lambda)$: $px - \lambda y + \frac{\lambda^2}{2} = 0$

Equation de la normale en M : $\lambda x + py - \frac{\lambda^3}{2p} - \lambda p = 0$

1^{ère} partie:

17 Coordonnées de N : $(\frac{\lambda^2}{2p} + 2p + \frac{2p^3}{\lambda^2}, -\lambda - \frac{2p^2}{\lambda})$ de I : $(\frac{\lambda^2}{2p} + p + \frac{p^3}{\lambda^2}, \frac{p^2}{\lambda})$

Courbe décrite par I : $x'(t) = \frac{\lambda^4 - 2p^4}{p\lambda^3}$, $y'(t) = \frac{p^2}{\lambda^2}$

Etude sur $]0, +\infty[+ \text{sym} / 0x$:

λ	0	$p2^{1/4}$	$+\infty$
x'	-	0	+
x	$+\infty$		$+\infty$
y'	-	$-p2^{1/4}$	$+\infty$
y	-		+



Rayon de courbure: $R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{x'y'' - y'x''} = \frac{y'^3}{-x''y'} = \frac{y'^2}{-x''} = \frac{p}{4}$ (en utilisant le fait que $x'(p2^{1/4}) = 0$ et $\lambda^4 = 2p^4$)

27 Equation d'une droite passant par I : $\alpha(y + \frac{p^2}{\lambda^2}) = \beta(x - \frac{\lambda^2}{2p} - p - \frac{p^3}{\lambda^2})$

Pour que cette droite soit normale à (P) , il faut et il suffit que: $\exists \mu$:

$\beta/\alpha = -\mu/p \Rightarrow (D): p(y + \frac{p^2}{\lambda^2}) + \mu(x - \frac{\lambda^2}{2p} - p - \frac{p^3}{\lambda^2}) = 0$ et que $(\frac{\mu^2}{2p}, \mu) \in (D)$.

i.e.: $\frac{\mu^3}{2p^2} - (\frac{\lambda^2}{2p^2} + \frac{p^2}{\lambda^2})\mu + \frac{p^2}{\lambda^2} = 0$: Equation du 3^{ème} degré dont on connaît une solution: $\mu = \lambda$; les 2 autres solutions sont données par: $\mu^3 + \lambda\mu - \frac{2p^4}{\lambda^2} = 0$

Equation de la droite $M_1 M_2$: $2px - (\mu_1 + \mu_2)y + \mu_1 \mu_2 = 0$

$\Rightarrow 2px + \lambda y - \frac{2p^4}{\lambda^2} = 0$

37: $\frac{y'}{x'} = -2t$ (D_1) et tangente à (C) en $K \Leftrightarrow -\frac{2p}{\lambda} = -2t$ (égalité des pentes)

et $K \in (D_1) \Leftrightarrow t = p/\lambda$ et $2p(3pt^2) + \lambda(-4pt^3) - \frac{2p^4}{\lambda^2} = 0$ ce qui est vérifié.

Comme $\lambda = p/t$ et $t \neq 0$, la réciproque est immédiate.

$\vec{T} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{4t^2+1}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} \Rightarrow \cos \varphi = \frac{\varepsilon}{\sqrt{4t^2+1}}$ et $\sin \varphi = \frac{\varepsilon(-2t)}{\sqrt{4t^2+1}}$. (ε du signe de t).

$R = \frac{\varepsilon(6pt)^3(4t^2+1)^{3/2}}{2(6pt)^2} = \frac{3}{2} p \frac{-2\varepsilon t}{\sqrt{4t^2+1}} (4t^2+1)^2 = \frac{3p \sin \varphi_0}{2 \cos^4 \varphi_0}$

$ds = \varepsilon 6pt \sqrt{4t^2+1} dt$

$\Rightarrow |ds| = \frac{p}{2} \varepsilon (4t^2+1)^{3/2} = \frac{p}{2 \cos^3 \varphi_0}$

40. $\vec{KS} = f(p) \cdot \vec{T} \Rightarrow \frac{d\vec{S}}{ds} = \frac{d\vec{K}}{ds} + \frac{d}{dp} (f(p)) \vec{T} + f(p) \frac{d\vec{T}}{ds} = (1 + \frac{1}{p} f'(p)) \vec{T} + \frac{f(p)}{R} \vec{N}$

La CNS cherchée est: $f'(p) = -R = \frac{3p}{2} \frac{\sin \varphi}{\cos^4 \varphi} \Rightarrow f(p) = -\frac{p}{2 \cos^3 \varphi}$

K est le centre de courbure en S à (C') .

Coordonnées de S : $x(t) = pt^2 - \frac{p}{2}$, $y(t) = pt \Leftrightarrow y^2 = p(x + \frac{p}{2})$: parabole.