

Exercices:

1° ⑫ a) ④ Avec $du = t^m dt$ et $v = (1-t)^n$, on trouve: $J_{m,n} = \frac{n}{m+1} J_{m+1,n-1} = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}$

b) ⑧ $x = uvw, y = u v (1-w), z = u(1-v) \Rightarrow J = u^2 v$ et $\varphi^{-1}(D) \begin{cases} 0 \leq u \leq 1 \\ 0 \leq v \leq 1 \\ 0 \leq w \leq 1 \end{cases}$

$\Rightarrow I = \frac{1}{p+q+r+2+3} \times J_{p+q+1,r} \times J_{p,q} = \frac{p!q!r!}{(p+q+r+2+3) \times (p+q+r+2)!}$

2° ⑬ On passe en coordonnées cylindriques: $I = 2\pi \cdot \int \int \int z \cos^2 r \cdot r dr dz = 2\pi \cdot \int_0^R z dz \left(\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} \cos^2 r dr \right)$
 $\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} \cos^2 r dr = \frac{1}{2} \sin(2r) + \frac{r}{2}$ et $\int_0^R \sin(2\sqrt{R^2-z^2}) z dz = \left(1 - \frac{\cos(R^2)}{2}\right) \Rightarrow \boxed{I = \frac{\pi}{2} (1 - \cos(R^2))}$

Problème 1:

1° ⑮ On peut considérer le mouvement de $(A, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K}) / (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ comme le mouvement composé de $A(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}) / (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et de $(A, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K}) / (A, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K}) \Rightarrow \boxed{\vec{K} = -\sin(\alpha(t)) \vec{J}_1 + \cos(\alpha(t)) \vec{K}_1}$

Comme $\vec{\Omega}_a = \vec{\Omega}_e + \vec{\Omega}_r \Rightarrow \vec{\Omega}_a = \boxed{\vec{\Omega}(t) = \vec{k} + \alpha'(t) \vec{I}}$ ④

$\vec{\Omega} \cdot (\vec{I} + \vec{J}) = 0 \Leftrightarrow \alpha'(t) + \sin(\alpha(t)) = 0$ équ. diff. à variables séparables ③

$\Rightarrow \tan\left(\frac{\alpha(t)}{2}\right) = e^{-t}$ (car $\alpha(0) = \frac{\pi}{2}$) $\Rightarrow \boxed{\cos(\alpha(t)) = \frac{1}{\cosh t}}$ et $\boxed{\sin(\alpha(t)) = \frac{1}{\sinh t}}$ ④

2° ⑯ Pour que l'axe instantané de rotation soit tangent à C en A, il faut et il suffit

que $\vec{V}_A = \frac{d\vec{A}}{dt}$ soit colinéaire à $\vec{\Omega}$; or: $\frac{d\vec{A}}{dt} = -b\vec{I} + f'(t)\vec{k} \Rightarrow f'(t) = b \cosh t$.

$\Rightarrow \boxed{f(t) = b \sinh t}$ car $f(0) = 0$ ③

Comme $\vec{\Omega}$ est le vecteur directeur de l'axe central et que $\vec{\Omega}$ est orthogonal à $\vec{I} + \vec{J}$ alors l'axe central reste dans le plan $x+y=0$ (il passe par A).

②

Problème 2:

1° ⑭ $\int_0^a \sin x^2 dx = \int_0^{a^2} \sin u \frac{du}{2\sqrt{u}} = \left[\frac{1-\cos u}{2\sqrt{u}} \right]_0^{a^2} + \frac{1}{4} \int_0^{a^2} \frac{1-\cos u}{u^{3/2}} du$ or: $\left| \frac{1-\cos u}{u^{3/2}} \right| \leq \frac{2}{u^{3/2}}$
 et comme $3/2 > 1$, $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos u}{u^{3/2}} du$ converge $\Rightarrow \boxed{S = \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos u}{u^{3/2}} du}$ converge ④

Il en va de même pour C.

2° ⑩ a) $\sin(x^2+y^2) = \sin x^2 \cos y^2 + \sin y^2 \cos x^2 \Rightarrow \iint_D \sin(x^2+y^2) dx dy = \int_0^t \sin x^2 dx \int_0^t \cos y^2 dy + \int_0^t \cos x^2 dx \int_0^t \sin y^2 dy$
 et y étant des variables muettes on trouve bien la relation demandée; de même pour G(t) ⑤

b) $\forall \epsilon_2, \exists t_0, \forall t \geq t_0, |\varphi(t) - L| < \epsilon_2$: considérons la différence: $R(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \varphi(u) du - L$

$|R(t)| \leq \frac{1}{t} \left| \int_0^t (\varphi(u) - L) du \right| \leq \frac{1}{t} \left(\int_0^t |\varphi(u) - L| du \right) \leq \frac{1}{t} \int_0^t \epsilon_2 du = \epsilon_2$