

2^e partie :

1^o / Equation des 3 normales : $d_1 x + p y - \frac{d_1^3}{3p} - d_2 p = 0$ i.e. $\{0, 1, 2\}$

Ces 3 droites sont $\Delta \Leftrightarrow \begin{vmatrix} d_0 & p & -\frac{d_0^3}{3p} - d_0 p \\ d_1 & p & -\frac{d_1^3}{3p} - d_1 p \\ d_2 & p & -\frac{d_2^3}{3p} - d_2 p \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

(en utilisant les prop. des déterminants : $\begin{vmatrix} 1 & d_0 & d_0^3 \\ 1 & d_1 & d_1^3 \\ 1 & d_2 & d_2^3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow d_1 + d_2 + d_3 = 0$ (on suppose $d_0 \neq d_1 \neq d_2$).

$\Leftrightarrow$ l'isobarycentre est sur l'axe Ox .

2^o / On utilise la même technique que dans la 2^e de

la 1^{re} partie : $x y = \frac{1}{1-k} \left(\frac{d^2}{2p} - k \frac{d^2}{2p} - 2k p - 2k \frac{p^2}{d^2} \right)$ $y_0 = \frac{1}{1-k} \left(1 + k d + 2k \frac{p^2}{d^2} \right)$

équation des normales : $p(y - y_0) + p(x - x_0) = 0$

avec $p(y - y_0) + p\left(\frac{p^2}{2p} - x_0\right) = 0$. On obtient une équation du 3^e degré en p

qui admet d comme racine $\Rightarrow$ condition sur p : $p^3 + d p^2 + \frac{2p^2}{1-k} \left(1 + k + \frac{2k p^2}{d^2} \right) = 0$

Si les racines existent, on a : $d_1 + d_2 = -d$ et $d_1 d_2 = \frac{2d^2}{1-k} \left(1 + k + \frac{2k p^2}{d^2} \right)$.

$\Rightarrow$ Écrire M, M_2 : $2px + dy + \frac{2d^2}{1-k} \left(1 + k + \frac{2k p^2}{d^2} \right) = 0$

Quand k varie, la droite M, M_2 reste toujours // à (D) : $2px + dy = 0$

3^e partie :

17. On trouve : $\vec{I} = \frac{1}{\sqrt{2y^2 + p^2}} \begin{pmatrix} 2y \\ p \end{pmatrix}$, $\vec{J} = \frac{1}{\sqrt{2y^2 + p^2}} \begin{pmatrix} -p \\ 2y \end{pmatrix}$
 $\begin{cases} x = \frac{d^2}{2} - \frac{p}{2} + x \cos \theta + y \sin \theta \\ y = \lambda + x \sin \theta + y \cos \theta \\ z = z \end{cases}$

2^o . . .

37. Si le mot de S est à accélération centripète alors : $\vec{OS} \wedge \vec{V} = c \vec{e}$

i.e. $\vec{OS} \wedge \vec{V} = -\frac{p}{2} \vec{e} \wedge (-p \vec{e}) = \frac{p^2}{2} \vec{e} \Leftrightarrow x y' - x' y = \frac{p^2}{2} \Leftrightarrow \lambda' \left(-\frac{d^2}{2} - \frac{p}{2} \right) = \frac{p^2}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{d^3}{3p} + p \frac{d}{2} = -\frac{p^2}{2} (t - t_0)$ or, si $t = 0$, $y = 0 = d \Rightarrow t_0 = 0$.

d'où : $\frac{d^3}{3p} + p \frac{d}{2} = -\frac{p^2}{2} t$

So $(-p/2, 0)$, $S_1(0, -\frac{p\sqrt{2}}{2})$: pour $\lambda = -\frac{p\sqrt{2}}{2}$, on trouve $t = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

Exercice :

$\vec{OM}(t) = r \cdot \vec{e} \cdot \vec{u}' + r' \vec{u} = (r \vec{u}' + r' \vec{u}) \vec{e} = C \left(\frac{1}{r} \vec{u}' + \frac{r'}{r^2} \vec{u} \right)$ car : $\vec{e} = \frac{C}{r^2}$
 $= C (\lambda \vec{u}' - \lambda' \vec{u})$

$\Rightarrow \frac{d\vec{OM}(t)}{dt} = -C (\lambda + \lambda'') \vec{u}$ on prend $\vec{T} = \vec{u} \Rightarrow \frac{d\vec{OM}}{dt} = -C (\lambda + \lambda'') \vec{u}$ et $\alpha = \theta$

or : $R = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d\vec{OM}}{d\theta} = -C (\lambda + \lambda'')$

27 Pour que (H) soit un arc, il faut et il suffit que : $R = a$ (constante)

i.e. $\lambda + \lambda'' = \alpha \Leftrightarrow \lambda = \alpha + \beta \cos(\theta - \theta_0) \Leftrightarrow r = \frac{1}{\alpha + \beta \cos(\theta - \theta_0)}$

$\Leftrightarrow$ La trajectoire de M est une ellipse de foyer O .
 Conique

