Problème :

1°/. On pose $t = \operatorname{tg}\theta$, $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ $\Rightarrow$ $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta$, $y = \sin 2\theta$: ellipse de centre $\Omega(\frac{1}{2}, 0)$ privée du point : O.

2°/. $x' = 2\,\dfrac{\lambda(3t^2+1) - t^3}{t^2(t^2+1)^2}$, $y' = 2(t^2-1)\,\dfrac{\lambda(3t^2+1) - t^3}{t^3(t^2+1)^2}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{y'}{x'} = \dfrac{t^2-1}{t}$.

$y' = 0$, $x' \neq 0$ pour $t = \pm 1$ $\Rightarrow$ $x_\lambda(1) = -\lambda + \frac{1}{2}$ $\quad y_\lambda(1) = -\lambda + 1$: droite $\boxed{y = x + 1/2}$

$x_\lambda(-1) = \lambda + \frac{1}{2}$ $\quad y_\lambda(1) = -\lambda - 1$ droite $\boxed{y = x - 1/2}$

3°/. $x' = y' = 0 \Leftrightarrow \lambda(3t^2+1) - t^3 = g(t) = 0$: l'étude des variations de g montre que l'équation $g(t) = 0$ ne possède qu'une seule racine $t(\lambda)$ t.q. $t(\lambda) < 2\lambda < 0$ ou $t(\lambda) > 2\lambda > 0$

$\lambda = \dfrac{t^3}{3t^2+1} = h(t)$ h est une fonction croissante strictement de $\mathbb{R}^*$ sur $\mathbb{R}^*$, elle admet une fonction réciproque $t(\lambda)$ strict. $\nearrow$ de $\mathbb{R}^*$ sur $\mathbb{R}^*$

Coordonnées de S_λ : $x = \dfrac{1}{3t^2+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta$, $y = \dfrac{3t}{3t^2+1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\theta$ (en posant $t = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\theta$)

On reconnait une ellipse de centre $(\frac{1}{2}, 0)$ privée du pt O qui se déduit de C_0 par une affinité orthogonale d'axe Ox, de rapport $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4°/. On a vu que $\dfrac{y'}{x'} = \dfrac{t^2-1}{t}$ $\Rightarrow$ équation de la tangente $(t \neq 0)$: $\boxed{y = \dfrac{t^2-1}{t}x - \dfrac{\lambda}{t^2} + \dfrac{1}{t}}$

5°/ Si m est fixé, 2 pts sur la courbe vont avoir 1 tangente de pente m : il suffit de résoudre l'équation : $t^2 - mt - 1 = 0$ (qui a 2 sol. $t_1, t_2 \neq$) $s = t_1 + t_2 = m$, $p = t_1 t_2 = -1$

Pour que ces 2 tgtes soient confondues, il faut et il suffit que :

$$p(t_1, \lambda) = \frac{-\lambda + t_1}{t_1^2} = p(t_2, \lambda) = \frac{t_1 - t_2}{t_1^2 - t_2^2} = \frac{t_1 + t_2 - 2\lambda}{m(t_1+t_2) + 2} = \frac{1}{m} = \frac{m - 2\lambda}{m^2 + 2} \quad \text{i.e.} \quad \boxed{m = -\frac{1}{\lambda}} \quad (\lambda \neq 0)$$

Equation de (D_λ) : $\boxed{y = -\dfrac{x}{\lambda} - \lambda}$.

On a deux solutions et deux seules $\forall \lambda \in \mathbb{R}^*$ et $\lambda = \dfrac{t}{1-t^2}$

Les points d'$\cap$ de (D_λ) et (C_λ) ne sont autres que les pts de (C_λ) $(\lambda \neq 0)$ pour lesquels

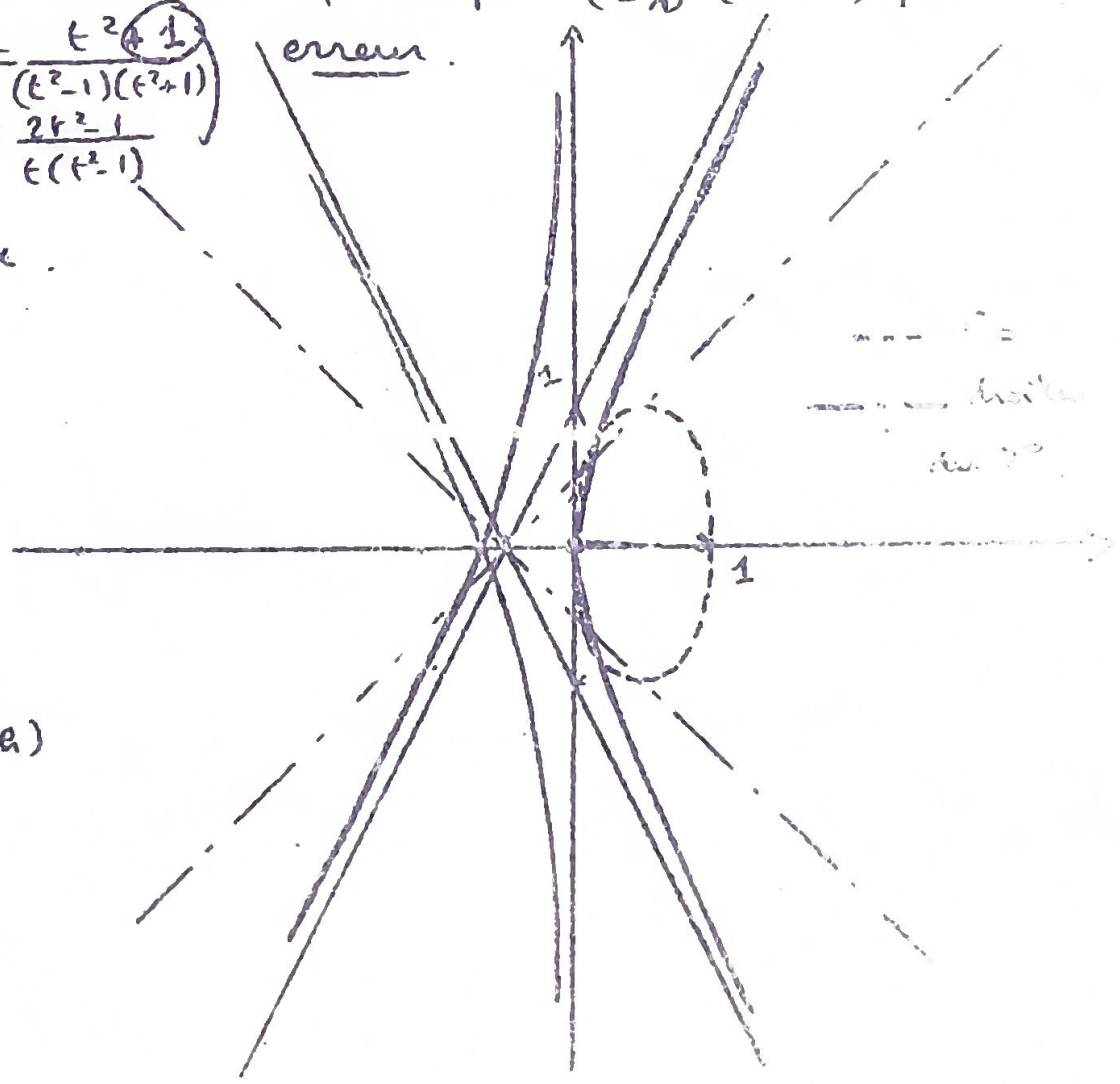
$\lambda = \dfrac{t}{1-t^2}$ $(t \neq 0)$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} x = \dfrac{t^2+1}{(t^2-1)(t^2+1)} \\ y = \dfrac{2t^2-1}{t(t^2-1)} \end{cases}$ erreur.

On obtient toute la courbe Γ.

$x' = \dfrac{-2t(t^4+1)}{(t^4-1)^2}$ sym / Ox.

$y' = \dfrac{-2t^4 + t^2 - 1}{t^2 \cdot (t^2-1)^2}$.

t	0		1		$+\infty$
x'	0	$-$	‖	$-$	
x	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0
y	‖ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0
y'	‖	$-$	‖	$-$	

Asymptote : $y = 2x + 1 - \dfrac{3h}{4} + o(h)$

en $+\infty$: $\dfrac{y'}{x'} \to +\infty$.