

A t_0 fixé, $\frac{1}{t} \left| \int_0^t (\varphi(u) - L) du \right| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow \exists t_1 \forall t > t_1 \frac{1}{t} \left| \int_0^t (\varphi(u) - L) du \right| < \varepsilon/2$ et en posant $T \geq \sup(t_0, t_1)$ alors $\forall \varepsilon > 0, \exists T, \forall t > T, |A(t)| < \varepsilon$ c.q.f.d. $\leftarrow (5)$

c) Comme $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = 2SC \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t F(u) du = 2SC$; de même $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t G(u) du = C^2$

3° (a). $C = D \cup D'$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq t, 0 \leq x \leq y\}$ et $D \cap D' = \emptyset$

$\Rightarrow F(t) = \iint_D \sin(x^2 + y^2) dx dy + \iint_{D'} \sin(x^2 + y^2) dx dy$; or, par raison de symétrie, $\iint_{D'} = \iint_D \leftarrow (1)$
d'où le résultat

b) $\varphi(D_t) = \{(r, \theta) : 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq r \leq \frac{t}{\cos \theta}\} \Rightarrow F(t) = \int_0^{\pi/4} \left(1 - \frac{\omega t^2}{\cos^2 \theta}\right) d\theta = \frac{\pi}{4} - \int_0^{\pi/4} \omega \left(\frac{t^2}{\cos^2 \theta}\right) d\theta$

c) $\frac{1}{t} \int_0^t F(u) du = \frac{\pi}{4} - \int_0^{\pi/4} \left(\int_0^t \frac{\omega u^2}{\cos^2 \theta} du \right) d\theta = \frac{\pi}{4} - \int_0^{\pi/4} \left(\int_0^t \omega \left(\frac{u^2}{\cos^2 \theta}\right) du \right) d\theta$ (Fubini) $\leftarrow (2)$

et en posant $v = \frac{u}{\cos \theta}$ on trouve le résultat demandé.

On sait que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \omega v^2 dv = C$ i.e. $\Rightarrow \forall a > 0, \exists T \forall t > T, \int_0^t \omega v^2 dv < C + a$

Soient fixé, si on choisit $t_0 = T \cos \theta$, on a bien $\left| \int_0^{t/\cos \theta} \omega v^2 dv \right| < C + a$. $\leftarrow (2)$

$\Rightarrow \left| \frac{1}{t} \int_0^t F(u) du - \frac{\pi}{4} \right| < \frac{1}{t} \int_0^{\pi/4} \omega \theta \left| \int_0^{t/\cos \theta} \omega v^2 dv \right| d\theta < \frac{1}{t} (C + a) \int_0^{\pi/4} \omega \theta d\theta \rightarrow 0 (t > T > t_0)$

$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = \frac{\pi}{4}$ en utilisant la 1° et c. $\leftarrow (2)$

d) On trouve $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t G(u) du = 0$. * $\leftarrow (5)$

e). $SC = \frac{\pi}{8}$ et $S^2 = C^2$, comme $S > 0$ (c.p. 1°) alors $S = C = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ $\leftarrow (4)$

4° (a). $\int_{AB} \exp(-\frac{z^2}{2}) dz = i \int \exp(-(\frac{R+iy}{2})^2) dy = \int_0^R \exp(-iRy) \times \exp(\frac{y^2 - R^2}{2}) dy$ $\leftarrow (2)$

or $|\exp(-iRy)| = 1$ et $y \leq R \Rightarrow y^2 - R^2 \leq yR - R^2 \Rightarrow \left| \int_{AB} \exp(-\frac{z^2}{2}) dz \right| \leq \int_{AB} \exp(-\frac{1}{2}R^2 + \frac{1}{2}Ry) dy$

b). $\int_0^R \exp(-\frac{1}{2}R^2) \exp(\frac{1}{2}Ry) dy = \exp(-\frac{1}{2}R^2) \times \frac{2}{R} (\exp(\frac{1}{2}R^2) - 1) = \frac{2}{R} (1 - \exp(-\frac{1}{2}R^2)) \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$ c.q.f.d.

c). $\int_{OAB} \exp(-\frac{z^2}{2}) dz = \int_{OA} \exp(-\frac{z^2}{2}) dz + \int_{AB} \exp(-\frac{z^2}{2}) dz + \int_{BO} \exp(-\frac{z^2}{2}) dz$
 $\int_0^R \exp(-\frac{x^2}{2}) dx$

$= \int_0^R (\cos t^2 - i \sin t^2) dt = \int_0^R \exp(-\frac{(1+i)t^2}{2}) d(1+i)t$ $\leftarrow (1)$
 $= \int_0^R (\cos t^2 + i \sin t^2) dt = i \int_0^R (\cos t^2 - i \sin t^2) dt$

En passant à la limite et en utilisant le fait que $\int_{OAB} \exp(-\frac{z^2}{2}) dz = 0$, on trouve

$C + S = \int_0^{+\infty} \exp(-\frac{x^2}{2}) dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ et $C - S = 0$

$\Rightarrow \boxed{C = S = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}}$

* $G(t) = \int_0^{\pi/4} \sin\left(\frac{t^2}{\cos^2 \theta}\right) d\theta \Rightarrow \frac{1}{t} \int_0^t G(u) du = \frac{1}{t} \int_0^{\pi/4} \cos \theta \left(\int_0^{t/\cos \theta} \sin v^2 dv \right) d\theta$