

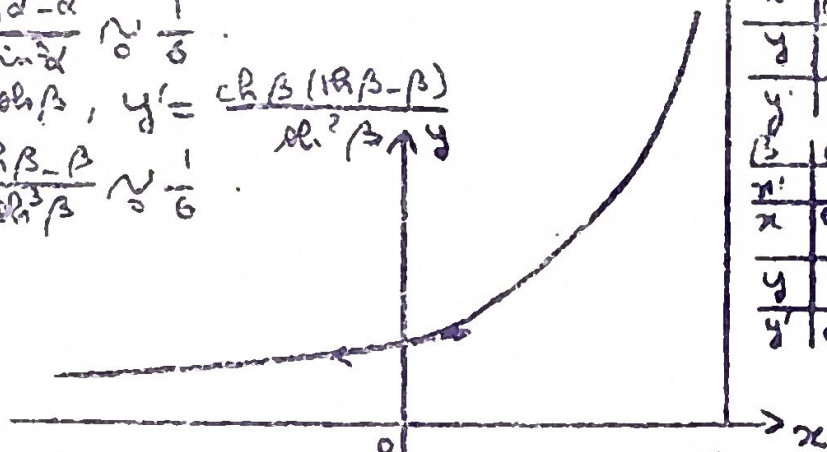
Corrigé du devoir surveillé

I. 1° $x' = 2 \sin d$, $y' = \frac{\cos d (r \sin d - d)}{\sin^2 d}$

$\frac{y'}{x'} = \frac{\cos d}{2} \frac{r \sin d - d}{\sin^2 d} \sim \frac{1}{8}$

2° $x' = -2 \sin \beta$, $y' = \frac{ch \beta (18\beta - \beta)}{ch^2 \beta}$

$\frac{y'}{x'} = \frac{ch \beta}{2} \frac{18\beta - \beta}{ch^2 \beta} \sim \frac{1}{6}$



θ	0	π
x'	0	0
x	0	$+\infty$
y	1	$+\infty$
y'	0	$+\infty$
β	0	$+\infty$
x'	0	$-\infty$
x	0	$-\infty$
y	1	0
y'	0	$-\infty$

3° Ici, $y' = \frac{dy}{dx}$: par exemple, avec C_1 : $x(4-x)y' = 4 \sin^2 d \cdot \frac{\sin d - d \cos d}{2 \sin^3 d} = 2 - 2d \frac{\cos d}{\sin d}$

on trouve alors $a=2$, de même avec C_2 .

4° Résolution de (E) : équation homogène : $y = \frac{C}{\sqrt{x(4-x)}}$ et on fait varier

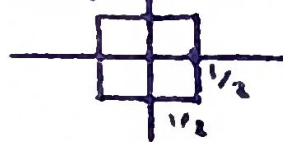
la constante : $C' = \frac{2\sqrt{x(4-x)}}{x(4-x)}$ et on distingue 3 cas : $x \in]0, 4[$, on pose $x = 4 \sin^2 \frac{\theta}{2} \Rightarrow C = 4 \sin^2 \frac{\theta}{2}$

$x < 0$: $x = -4 \sinh^2 \frac{\beta}{2} \Rightarrow C = 4\beta$, $x > 0$: $x = 4 \cosh^2 \frac{\beta}{2}$, $C = -4\beta$: d'où les solutions.

Solutions définies et continues sur $]-\infty, +4[$: $x > 0$: $y = \frac{4 \operatorname{Arctan} \sqrt{\frac{x}{4-x}}}{\sqrt{x(4-x)}}$, $x < 0$: $y = \frac{4 \operatorname{Arctanh} \sqrt{\frac{-x}{4-x}}}{\sqrt{x(4-x)}}$

II. $x\sqrt{1-\sin^2 \theta} + x\sqrt{1+\sin^2 \theta} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2-2xy} + \sqrt{x^2+y^2+2xy} = 1 \Leftrightarrow$

$|x-y| + |x+y| = 1$: on obtient un carré



III. $r = \cos \frac{\theta}{3} \operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{3} + \frac{\pi}{4} \right)$. étude sur un

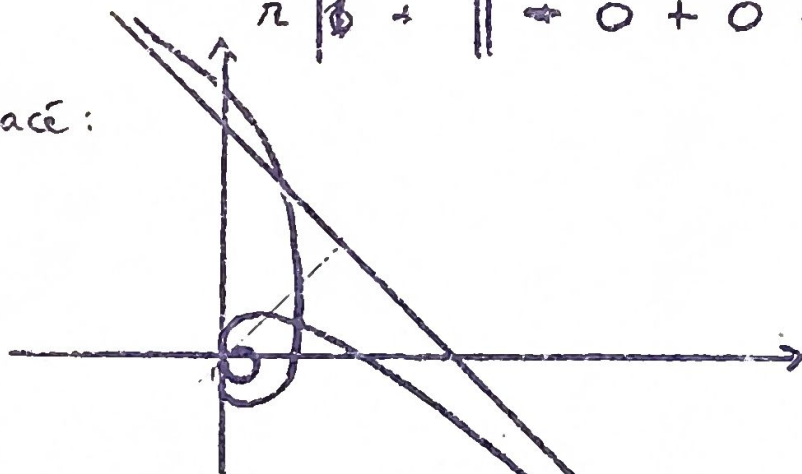
intervalle d'amplitude 3π : par exemple : $[0, 3\pi] - \{3\pi/4\}$

signe de r : θ | 0 | $3\pi/4$ | $3\pi/2$ | $9\pi/4$ | 3π ; branche infinie : $T = \theta - 3\pi/4$:

r | 0 | + | 0 | + | 0 | -

$r \sin T = -\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} T + o(T)$

tracé :



points multiples :

en 0 : $\theta = 3\pi/2$ et $\theta = 9\pi/4$

ailleurs, l'étude est plus

délicate.

IV. Pour $x \neq 0$ on peut écrire : $y'' = \frac{2y' + xy}{x}$ donc, y'' est dérivable et par récurrence,

y'' est C^∞ . On dérive 2 fois ; on trouve : $xy''' - xy'' - 2y' = 0$ et en remplaçant

y' , on arrive à : $x(y''' - 2y'' + y) = 0 \Leftrightarrow$ (pour $x \neq 0$) $y''' - 2y'' + y = 0$ (E₁)

les solutions de (E₁) sur $\mathbb{R}$ sont : $y = (a+b)e^x + (c+d)e^{-x}$ et en reportant

dans (E), on trouve : $b+a=0$, $d-c=0$ d'où : $y = a(x-1)e^x + c(x+1)e^{-x}$, $x \neq 0$.

L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}^*$ est de dim. 4 :

Sol. de classe C^2 on trouve : $y(0) = -a+c = -a'+c'$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = a-c = +a'-c'$ d'où, l'ens. des sol. de classe C^2 est de dim. 3.