

HX4 Lundi 13/05/85

Devoir surveillé (2H).

I. Soit φ l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$: $\varphi: (x, y) \mapsto (X, Y)$

$$\text{où } X = x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2} \text{ et } Y = (x+\sqrt{1+x^2})(y+\sqrt{1+y^2})$$

1° Montrer que φ est continuellement différentiable. Calculer son jacobien.

2° On pose $x = \sinh u$, $y = \sinh v$: exprimer X et Y en fonction de u, v . Montrer que $\{M, \vec{OM} = X\vec{i} + Y\vec{j}\}$ décrit une courbe lorsque (x, y) décrit $\mathbb{R}^2$ que l'on précisera.

II. Soit $\omega = f(x^2+y^2)(y^2-x^2-2xy)dx - f(x^2+y^2)(y^2-x^2+2xy)dy$

1°. Trouver toutes les fonctions $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ telles que ω soit une forme différentielle exacte.

2° Parmi les solutions trouvées, on choisit celle qui vérifie $f(1) = 1$, intégrer ω ; reconnaître les courbes intégrales de l'équation $\omega = 0$.

III. Résoudre l'équation différentielle:

$$(1+x)y'' - 2y' + (1-x)y = xe^{-x} \quad (\text{on remarquera que}$$

$y_0 = e^x$ est solution de l'équation homogène).

Préciser l'ensemble des solutions de classe C^2 .

IV. Trouver les réels α et β et la fonction g telle que

l'équation différentielle $y'' + \alpha y' + \beta y = g$ ait pour solutions l'ensemble des fonctions $f_{(a,b)}(x) = e^{-\frac{x}{2}} \left(a \sin \frac{x\sqrt{3}}{2} + b \cos \frac{x\sqrt{3}}{2} + \frac{x^5-1}{x-1} \cos \frac{x\sqrt{3}}{2} \right)$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.