

I. Algèbre : On pose $E = \mathbb{R}^4$, $\beta = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}$ la base formée des vecteurs $(1, 0, 1, 0)$, $(0, 1, 0, 1)$, $(-1, 0, 1, 0)$, $(0, -1, 0, 1)$.

0) Soient F_1 le s.e.v. engendré par β_1, β_2 , $F_2 = \text{Vect}(\beta_3, \beta_4)$ et f l'isomorphisme de E laissant F_1 et F_2 invariants, induisant sur F_1 une similitude de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\pi/4$, et induisant sur F_2 une homothétie de rapport 3.

a) Calculer la matrice de f par rapport à β

b) En déduire la matrice de f par rapport à la base canonique B .

1) On considère la matrice :

$$M(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & -1/2 & -1 & -1/2 \\ 1/2 & \alpha & 1/2 & -1 \\ -1 & -1/2 & \alpha & -1/2 \\ 1/2 & -1 & 1/2 & \alpha \end{pmatrix}$$

a) Calculer $\text{Det } M(\alpha)$

b) En déduire $\text{Det } M(2)$. Montrer que $M(2)$ est inversible.

c) Déduire de $\text{Det } M(\alpha)$ le polynôme caractéristique de $M(2)$

(i.e. $\text{Det}(M(2) - \lambda I_4)$). Indiquer une méthode plus simple pour son calcul.

2) On considère le polynôme $P = X^4 - 8X^3 + 23X^2 - 30X + 18$

a) Calculer le p.g.c.d. de P et P' , en déduire une racine double de P .

b) Achèver la décomposition de P sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

(DEUG A1 Dijon 81)

II. Courbes paramétrées : on note Γ la courbe : $x = t(1 - e^t)$, $y = \ln(1+t)$

1) Étudier les variations de x et y , et préciser les branches infinies de Γ .

2) Montrer que Γ admet une tangente au point $(0, 0)$; préciser la position de Γ par rapport à cette tangente au voisinage de ce point.

3) Construire Γ (ne pas faire l'étude générale de sa concavité)

(DEUG A Orléans 81)

III. Equations différentielles : soit $(E) : x^2 y' - y = x^2 - x + 1$

et $F(x)$ une primitive de $(1 - \frac{1}{x})e^{1/x}$.

1) Intégrer (E) (on exprimera les solutions en fonction de F , qu'on ne demande pas de calculer à ce stade).