

DS n° 11 Mercredi 6/5/84

Section A2 (programme P')

EN SET

MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

PRÉLIMINAIRES ET NOTATIONS

On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels. Une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sera dite localement intégrable si elle est intégrable sur tout intervalle fermé borné $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. On pourra utiliser le fait que si f est localement intégrable alors g définie par $g(x) = f(\lambda x + \mu)$ avec $\mu \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et λ non nul est localement intégrable et vérifie :

$$\int_a^b g(t) dt = \frac{1}{\lambda} \int_{\lambda a + \mu}^{\lambda b + \mu} f(t) dt.$$

PREMIÈRE PARTIE

On considère f, g, h et k des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ localement intégrables vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad f(x+y) + g(x-y) = h(x) + k(y)$$

$$1^\circ \text{ On pose : } F(x) = \int_0^x f(t) dt, \quad G(x) = \int_0^x g(t) dt, \quad H(x) = \int_0^x h(t) dt$$

$$\text{et } K(x) = \int_0^x k(t) dt.$$

Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad F(x+y) - F(x) - G(x-y) + G(x) - K(y) = y h(x)$$

2° En déduire que les quatre fonctions f, g, h et k sont continues, puis qu'elles sont indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$.

3° Montrer que ce sont des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

DEUXIÈME PARTIE

On suppose que l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) est muni de son produit scalaire canonique :

$$(x_1, \dots, x_n) \cdot (y_1, \dots, y_n) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n;$$

DS n° 11 Mercredi 6/5/84

Section A2 (programme P')

EN SET

MATHEMATIQUES

DURÉE : 4 heures

PRÉLIMINAIRES ET NOTATIONS

On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels. Une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sera dite localement intégrable si elle est intégrable sur tout intervalle fermé borné $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. On pourra utiliser le fait que si f est localement intégrable alors g définie par $g(x) = f(\lambda x + \mu)$ avec $\mu \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et λ non nul est localement intégrable et vérifie :

$$\int_a^b g(t) dt = \frac{1}{\lambda} \int_{\lambda a + \mu}^{\lambda b + \mu} f(t) dt.$$

PREMIÈRE PARTIE

On considère f, g, h et k des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ localement intégrables vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad f(x+y) + g(x-y) = h(x) + k(y)$$

$$1^\circ \text{ On pose : } F(x) = \int_0^x f(t) dt, \quad G(x) = \int_0^x g(t) dt, \quad H(x) = \int_0^x h(t) dt$$

$$\text{et } K(x) = \int_0^x k(t) dt.$$

Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad F(x+y) - F(x) - G(x-y) + G(x) - K(y) = yh(x)$$

2° En déduire que les quatre fonctions f, g, h et k sont continues, puis qu'elles sont indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$.

3° Montrer que ce sont des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

DEUXIÈME PARTIE

On suppose que l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) est muni de son produit scalaire canonique :

$$(x_1, \dots, x_n) \cdot (y_1, \dots, y_n) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n;$$