

2) Chercher une solution particulière de (E) qui soit un polynôme ; en déduire une expression de F, puis vérifier le résultat.

3) Montrer que les points d'inflexion des courbes intégrales de (E) sont tous sur une même droite parallèle à l'axe des y, puis que les tangentes d'inflexion passent toutes par un même point.

4) Après une étude rapide des branches infinies, donner l'allure des courbes  
(DEUG MP I Paris Nord 82)

#### IV. Calcul différentiel et rectification:

Soit A un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ ,  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$ ,  $(x_0, y_0) \in A$  tel que  $f(x_0, y_0) = 0$ . On note :  $p = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ ,  $q = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ ,  $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$ ,  $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$  et  $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$ . On suppose qu'au voisinage de  $(x_0, y_0)$ ,  $f(x, y) = 0$  définit y comme fonction implicite d'x :  $y = \varphi(x)$  ; on note (C) sa courbe représentative.

0) Préciser l'hypothèse manquante sur f pour qu'il en soit ainsi.

1) Exprimer  $\varphi'(x_0)$ ,  $\varphi''(x_0)$  à l'aide de p, q, r, s et t ; en déduire le rayon de courbure à (C) en  $(x_0, y_0)$ .

2) On se propose de retrouver ce résultat à l'aide des cercles de courbure:

a) Ecrire le développement de Taylor-Young pour  $f(x, y)$  au voisinage de  $(x_0, y_0)$  à l'ordre 2 en utilisant p, q, r, s, t.

b) Donner l'équation de la tangente à (C) en  $(x_0, y_0)$  ainsi que l'équation du faisceau de cercles tangents à (C) en  $(x_0, y_0)$ .

c) En déduire le rayon de courbure en exprimant que le cercle de courbure est osculateur.

3) Application :

On prend ici  $f(x, y) = (1+x)^y - 2 - xy$

a) Chercher les solutions de  $f(1, y) = 0$  ①

b) On prend pour y la solution positive de ①, donner le rayon de courbure à (C) en ce point.