

On se propose de déterminer les applications f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant les propriétés

$$(1) \quad \forall u \in \mathbb{R}^n \quad f(u) \geq 0$$

$$(2) \quad \forall u \in \mathbb{R}^n \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \quad u \cdot v = 0 \Rightarrow f(u + v) = f(u) + f(v).$$

A. Cas où $n = 2$.

Soit f une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant (1) et (2).

1° Calculer $f((0, 0))$.

2° On se donne $u \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ vérifiant $\lambda > 1$.

a. Trouver deux éléments v_1 et v_2 de $\mathbb{R}^2$ tels que $\lambda u = u + v_1 + v_2$ avec $v_2 \cdot (u + v_1) = 0$ et $u \cdot v_1 = 0$.

b. En déduire que $f(\lambda u) \geq f(u)$.

3° On considère les applications φ et ψ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par $\varphi(x) = f((x, 0))$ et $\psi(x) = f((0, x))$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

a. Quelles sont les propriétés de φ et ψ ? On montrera en particulier que φ et ψ sont localement intégrables.

b. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \varphi(x + y) + \psi(x - y) = \varphi(x) + \psi(x) + \varphi(y) + \psi(-y).$$

Que peut-on en déduire pour φ et ψ ?

4° En conclure qu'il existe k nombre réel positif ou nul tel que

$$\forall u \in \mathbb{R}^2 \quad f(u) = k u \cdot u.$$

B. Généraliser ce résultat dans le cas où $n \geq 3$.

TROISIÈME PARTIE

A. On se propose de déterminer les applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant

$$(C) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)f(y)$$

On suppose que :

(i) f est localement intégrable;

(ii) l'application F définie par $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ n'est pas identiquement

nulle.